

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

МИХАСЕНКО МИХАИЛ ОЛЕГОВИЧ

**Парциально-волновой анализ  
системы  $\pi^-\pi^0$  в области масс  $< 1.2$  ГэВ**

Факультет Общей и прикладной физики  
Кафедра Физики Высоких Энергий

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

Научный руководитель:  
к.ф.-м.н. ХОХЛОВ Ю. А.

Рецензент:  
к.ф.-м.н. САДОВСКИЙ С. А.

МОСКВА  
20 июня 2013

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Мотивация</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Описание экспериментальной установки ВЕС</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Анализ данных</b>	<b>12</b>
4.1	Реконструкция. Критерии отбора . . . . .	12
4.2	Три набора событий . . . . .	14
4.3	Угловой анализ . . . . .	15
4.3.1	Система Готфрида-Джексона . . . . .	15
4.3.2	Рассматриваемые переменные . . . . .	16
4.4	Акцептанс . . . . .	17
4.4.1	Масс-зависимые эффекты . . . . .	17
4.4.2	$t'$ -зависимые эффекты . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Метод моментов</b>	<b>22</b>
5.1	Формализм . . . . .	22
5.2	Реализация . . . . .	24
5.2.1	Метод линейной алгебры . . . . .	24
5.2.2	Расширенный метод линейной алгебры . . . . .	25
<b>6</b>	<b>Парциально-волновой анализ. Извлечение Амплитуд.</b>	<b>27</b>
6.1	Формализм. Расширенный метод максимума правдоподобия	28
6.2	Реализация . . . . .	29
6.3	Неоднозначности . . . . .	29
<b>7</b>	<b>ПВА анализ для разных значений переданного импульса</b>	<b>32</b>
7.1	Модель фита . . . . .	33
7.2	Результаты . . . . .	35
<b>8</b>	<b>Заключение</b>	<b>38</b>

<b>А Сравнение предсказанных и наблюдаемых распределений</b>	<b>40</b>
<b>В Моменты</b>	<b>49</b>
<b>С Результаты фита</b>	<b>55</b>

# Глава 1

## Введение

Институт Физики Высоких Энергий, Протвино, располагает ускорительным комплексом, позволяющим работать с протонными (первичными) и также вторичными пучками высокой интенсивности.

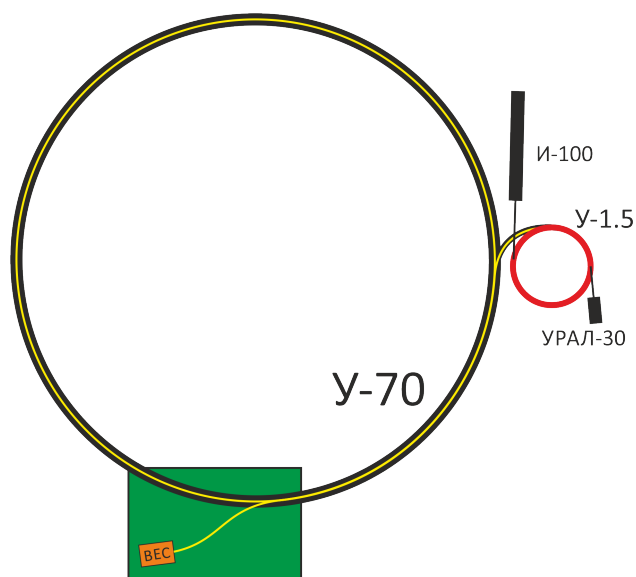


Рис. 1.1: Схема ускорительного комплекса У70. На рисунке изображено: линейный ускоритель Урал-30, разгоняющий протоны (ионы) до энергии 300 МэВ, бустер - кольцевой предускоритель, большое кольцо У70 и экспериментальный зал, в котором расположен 4Д канал - установка ВЕС

Представленный анализ выполнен на данных эксперимента ВЕС, полученных на установке с одноименным названием. Установка ВЕС была подвержена значительной модернизации и переработке, которая закон-

чилась в 2011 году. Были успешно проведены три физических сеанса (осенью 2011, осенью 2012, весной 2013). В ходе сеанса 2012 г. была набрана рекордная статистика по основным физическим реакциям, в том числе  $\pi^- N \rightarrow \pi^- \pi^0 N'$ , изучению которой посвящена данная работа. После отбора событий, который в деталях будет описан в следующих разделах, был получен набор данных со статистикой  $5.8 \times 10^6$  событий.

В конечном состоянии реакции имеются три частицы  $\pi^-$ ,  $\pi^0$  и  $N'$ . К сожалению,  $N'$  не регистрируется исходя из конструктивных особенностей установки. Две оставшиеся частицы хорошо регистрируются при помощи спектрометра и электромагнитного калориметра. В предположении, что  $N$  и  $N'$  - это протон, восстанавливается вся кинематика. Анализ распределений в системе  $\pi^- \pi^0$  позволяет изучать промежуточные короткоживущие состояния, рождающиеся в процессе реакции.

## Глава 2

### Мотивация

Система  $\pi^-\pi^0$  состоит из двух псевдоскаляров и обладает положительной  $G$  четностью, кроме того, так как заряд системы положительный, изоспин больше либо равен 1. Мезонов с  $I = 2$  не наблюдают. Таким образом, можно считать, что в нашей системе доминирует  $I = 1$ . Теперь предположим, что существует резонанс в  $J$ -волне. Тогда для него определена  $C$ -четность, совпадающая с  $C$ -четностью  $\pi^+\pi^-$  системы (нейтральной компоненты триплета), которая равна  $(-1)^J$ . Соотношение

$$G = C(-1)^I = (-1)^J(-1)^I \quad (2.1)$$

должно выполняться. Для систем с разными квантовыми числами  $(I, J)$   $G$  четность приведена в таблице.

3	-	+	-	+
2	+	-	+	-
1	-	+	-	+
I/J	0	1	2	3

Видно, что резонансы в  $D$ -волне и  $S$ -волне могут существовать только с  $I = 2$ , поэтому подавлены. В итоге, в конечном состоянии доминирует  $P$ -волна  $\rho$ -мезона. Изучение системы  $\pi^-\pi^0$  проводилось в ряде экспериментов [5, 4] на ограниченной статистике. Увеличение статистики на три порядка в нашем эксперименте позволяет рассчитывать на детальное изучение механизмов рождения  $\rho$ -мезона, а также поиск высокоспиновых резонансов.

Фейнмановская диаграмма для процесса рождения резонанса в сильном взаимодействии <sup>1</sup> для нашей реакции показана на рисунке 2.1. Здесь

---

<sup>1</sup>Тоже самое конечное состояние можно наблюдать в результате электромагнитных процессов (эффект Примакова), однако, вклад таких реакций мал. В данной работе речь идет исключительно о сильных взаимодействиях

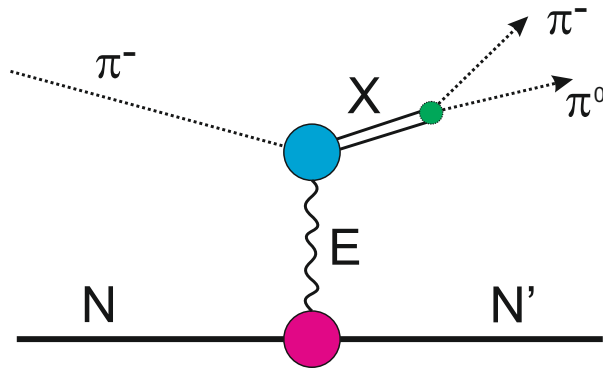


Рис. 2.1: Простейшая диаграмма процесса рассеяния  $\pi$ -мезона на нуклоне (ядре), в конечном состоянии система  $\pi^- \pi^0$  в результате распада резонанса  $X$  и нуклон (ядро), получивший импульс отдачи

$X$  - это  $\rho$ -мезон,  $E$  - обменная частица, а точнее, реджевская траектория, т.е. целое семейство частиц. Квантовые числа обменной траектории определяют механизм рождения  $\rho$ -мезона и влияют на угловые распределения конечных частиц в реакции ( $\pi^-$  и  $\pi^0$ ). Естественно, не любая частица может выступать в качестве обменной, различные законы сохранения налагают условия на ее квантовые числа.

- сохранение барионного числа требует, чтобы обменная частица была мезоном.
- Из сохранения заряда следует, что заряд  $E$  нейтральный.
- Сохранение  $G$ -четности накладывает требование  $G = -1$ .

Следовательно,  $E$  может быть:  $\pi$ ,  $\omega$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ , ... - мезоны. Основными кандидатами являются мезоны, перечисленные выше, так как они имеют сильную связь с  $\pi$ -мезонами ( $Br(E \rightarrow \rho\pi)$ ).

В анализе нам удалось разделить рождения  $\rho$ -мезона с разными проекциями полного углового момента ( $J = 1$ ) на направление импульса. Рассмотрим, какие механизмы рождения можно ожидать для каждой проекции.

- Если обменная частица не обладает спином, то  $\rho$ -мезон рождается без проекции, это отвечает  $\pi$ -обмену (OPE-механизм).
- Вводят квантовое число "натуральность" для обменной частицы (определяемую, как комбинацию пространственной четности и орбитального момента  $\eta = P(-1)^J$ ). Законы сохранения связыва-

ют "натуральность" с симметрией углового распределения вторичных частиц относительно плоскости рождения. Волна  $P_+ \sim \sin \phi_{TY}$  антисимметрична (здесь  $\phi_{TY}$  - азимутальный угол вылета  $\pi^-$  в системе покоя резонанса, отсчитываемый от плоскости рождения, см. 4.3.1), следовательно, в нее будут давать вклад только обмены с положительной "натуральностью" ( $\omega, a_2$ ).

- Для рождения  $\rho$ -мезона с проекцией и симметрией относительно плоскости рождения (для волны  $P_-$ ) остается главным обмен  $a_1$ .

В работе [5] показано что при энергии пучка 5 ГэВ доминирует однопионный обмен, однако, вклад  $\omega$  обмена непренебрежим. Другие вклады малы и не рассматривались.



## Глава 3

# Описание экспериментальной установки ВЕС

Описание установки ВЕС будет дано начиная с пучковой (головной) части и заканчивая трековой системой в хвостовой части и калориметром. Схема изображена на рис. 3.1. Ниже приводится список детекторов на эксперименте с краткой характеристикой:

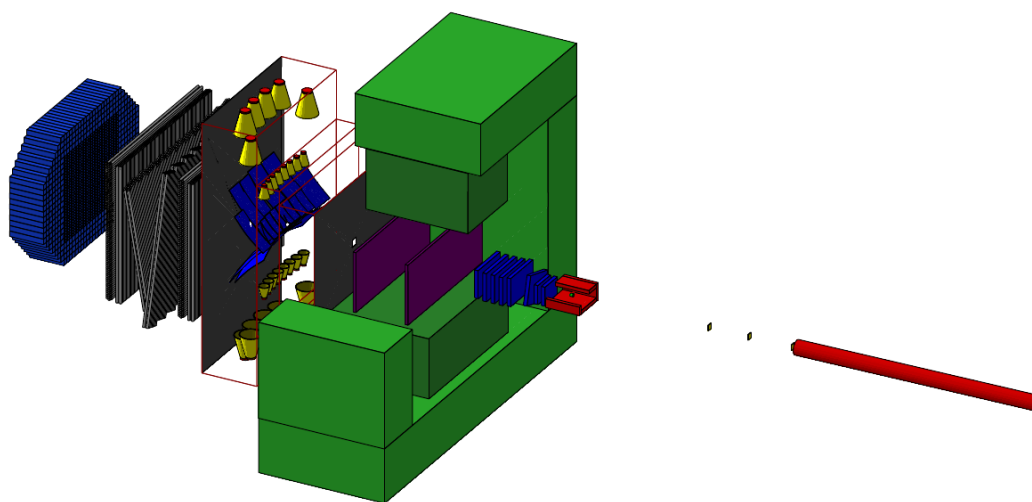


Рис. 3.1: Схематическое изображение установки ВЕС

- Пучковая часть
  - Три черенковских счетчика с разными давлениями для идентификации пучковой частицы ( $\pi/K/\bar{p}$ ).
  - пучковый спектрометр: "BSPC".

- Три пучковые камеры "HPC".
- Триггерные элементы (счетчики S1,S2,S3, определяющие пучок; счетчик с отверстием, подавляющий гало пучка. На счетчик смотрят два фотоэлектронных умножителя A10,A11)
- Мишенная часть
  - Бериллиевая мишень длиной 4 см, диаметром 3 см в оправе.
  - Охранная система из сцинтилляционных счетчиков, вокруг мишени, участвующая в триггере.
  - Счетчики типа "Sandwich", окружающие охранную систему.
- Спектрометр
  - 6 плоскостей проволочных камер "RED" размером  $32 \times 25.6$  см с шагом 2 мм.
  - 10 плоскостей проволочных камер "PC" размером  $57.6 \times 38.4$  см с шагом 2 мм.
  - 4 плоскости микродрейфовых камер "INOX" в магните размером  $192 \times 80$  см с шагом сигнальных проволок 6 мм.
  - Большой магнит с полем  $\sim 1$  Т.
  - Три станции дрейфовых трубок  $240 \times 192$  см. Диаметр трубки 3 см. Из них 6 горизонтальных, 6 вертикальных и 6 наклонных слоев.
- Электромагнитный калориметр типа "Шашлык" с двумя наборами квадратных ячеек разного размера. Сторона маленькой ячейки 3.8 см, сторона большой – в два раза больше. Чувствительная область калориметра имеет форму восьмигранника как показано на рис. Результирующий габаритный размер  $251 \times 182$  см. Длина калориметра составляет  $\sim 0.5\lambda_N$  и  $> 20X_0$
- Дополнительные триггерные элементы - подавители пучка "beam killers" (K1,K2). Счетчики представляют собой сцинтилляционный диск диаметром 6 см, с оптическим светосбором на фотоэлектронный умножитель. K1 расположен между 1-ой и 2-ой станциями дрейфовых трубок, K2 находится перед калориметром.

Разрешение для трековых детекторов варьируется от  $300 \mu\text{m}$  до  $600 \mu\text{m}$ , что приводит к разрешению по импульсу заряженных частиц:  $\delta p/p \approx 0.2p[\text{ГэВ}]\%$ . В результате аппаратная ширина пучкового  $K$ -мезона в

распаде  $\pi^+\pi^-$  составляет 6 МэВ. Энергетическое разрешение в калориметре  $\delta E/E \approx 10\%/\sqrt{E[\text{ГэВ}]}$ .

Основной триггер для приема событий можно записать так:

$$\underbrace{S1 \cdot S2 \cdot S3}_{beam} \cdot \underbrace{\bar{K}1 \cdot \bar{K}2}_{interaction} \cdot \underbrace{\bar{A}10 \cdot \bar{A}11}_{!halo} \cdot \underbrace{\bar{G}}_{!guard}$$

Выбор триггерной схемы обеспечивает выделение событий с взаимодействиями пучка в мишени преимущественно в области фрагментации пучка при достаточной эксклюзивности.

# Глава 4

## Анализ данных

Анализ данных можно глобально разделить на две основные процедуры:

1. Выделение чистого набора событий, отвечающих исследуемой реакции. Обычно производится наложением ограничений на данные.
2. Получение информации об первоначальных (физических) распределениях посредством коррекции на известную неэффективность экспериментальной установки.

В следующих подразделах в соответствующем порядке описываются эти процедуры: отбор событий, затем, изучение неэффективности и особенностей установки и, наконец, методы коррекции.

### 4.1 Реконструкция. Критерии отбора

Прежде всего производится первичная реконструкция событий, которая представляет из себя преобразование электрических сигналов с детекторов в "хиты", а затем – треки и частицы с определенной энергией и направлением. Также в ходе первичной обработки наложением констрейнтов на треки определяется вершина взаимодействия. Таким образом, для анализа мы можем оперировать 4-векторами, однако, не забывая, что они являются правильными с точностью до разрешения установки. Идентификация вторичных заряженных частиц в данном исследовании не производилась, все они считались пионами. Гамма кванты регистрируются по кластерам в электромагнитном калориметре, поэтому в ходе реконструкции невозможно определить направление. Если в событии есть вершина, то логично считать, что фотоны вылетели из нее.

Для изучаемой реакции в конечном состоянии регистрируется заряженная частица по сигналам в проволочных и дрейфовых камерах, а

также два гамма-кванта от распада  $\pi_0$ . Набором простых ограничений удастся выделить это конечное состояние практически без фона.

- Правильная топология (ровно два неслипшиеся кластера в ЭК, ровно один отрицательно заряженный трек)
- Инвариантная масса двух гамма-квантов близка к массе  $\pi^0$  ( $\pm 20$  МэВ)
- ”Эксклюзивность” в событии (суммарный импульс в интервале 26–31 ГэВ, близком к энергии пучка  $E_{beam} \approx 28$  ГэВ)
- Вершина взаимодействия близка к положению мишени ( $\pm 8$  см)

Наложение ограничений на распределения изображены на рисунке 4.1.

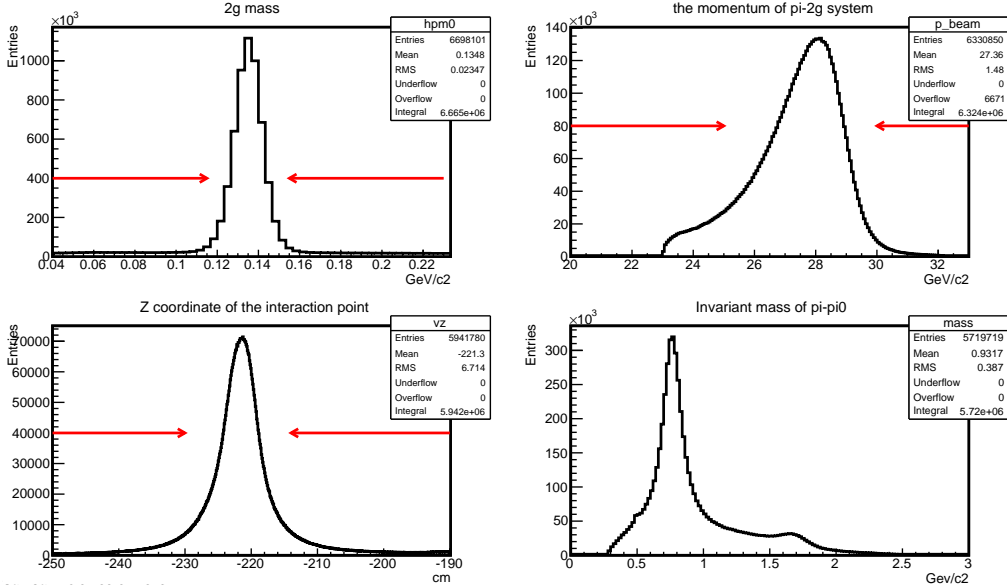


Рис. 4.1: Распределения по переменным, на которые накладываются ограничения. Стрелками показаны границы cut-ов.

Отношение сигнал/шум в пике  $\pi^0$  составляет  $\sim 40 : 1$ . В данном исследовании ввиду относительной малости этим фоном пренебрегалось.

Массовый спектр системы  $\pi^- \pi^0$  показан на рис. 4.2.

Типичное распределение по переданному импульсу за вычетом минимального значения для каждой массы показано на рис.4.3

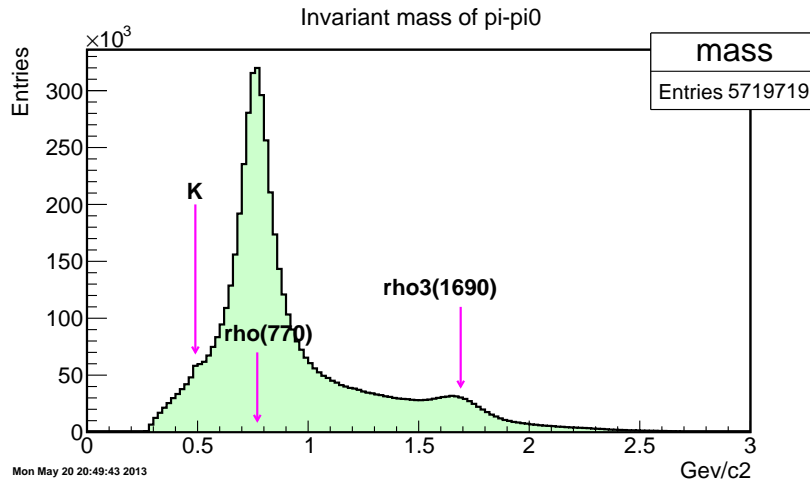


Рис. 4.2: Массовый спектр системы  $\pi^-\pi^0$ . Видны резонансные пики  $\rho$ -мезона и  $\rho_3$ -мезона. Неэффективность в системе идентификации пучка приводит к появлению маленького пика от распада  $K$  мезона.

## 4.2 Три набора событий

Для удобства дальнейшего изложения введем терминологию, следуя обозначениям работы [3], будем рассматривать три разных набора событий:

- События *observed*. Набор событий, зарегистрированный на установке в ходе измерений.
- События *produced*. Все события, произошедшие в эксперименте вне зависимости от их регистрации.
- События *accepted*. События из *produced*, которые могли быть зарегистрированы на установке, в предположении единичной эффективности всех приборов.

Отличие *accepted* и *produced* наборов составляют события, которые вообще не могут быть зарегистрированы, например, когда частицы летят вне чувствительных зон установки. Введение *accepted* набора было интересно по той причине, что идеальное знание эффективности установки могло бы позволить восстановить часть событий (в областях, где  $\varepsilon \neq 0$ ), увеличив статистику. В работе Садовского [6] показывается ущербность этого метода для современных экспериментов: для областей очень низкой эффективности ошибка в числе восстановленных событий критически велика.

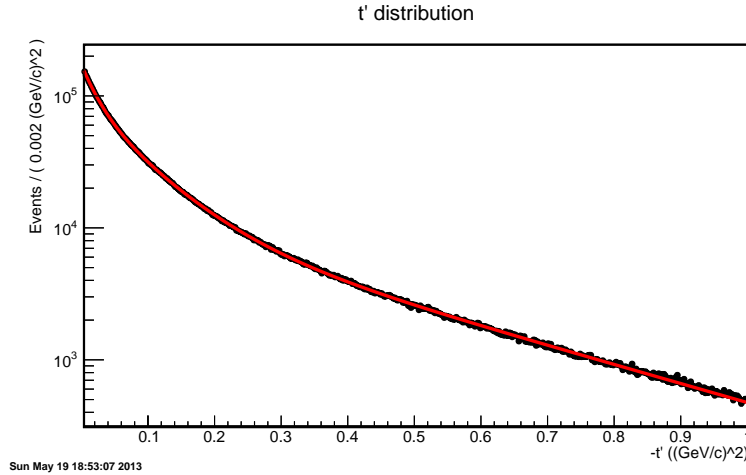


Рис. 4.3: Распределение по переданному импульсу за вычетом минимального значения для каждой массы. Фит тремя экспонентами дает наклоны  $-45 \text{ (ГэВ/с)}^{-2}$ ,  $-13 \text{ (ГэВ/с)}^{-2}$  и  $-3.3 \text{ (ГэВ/с)}^{-2}$ . Соответствующие вклады: 13.6%, 52.2% и 34.2%

В данной работе реакция хорошо статистически обеспечена, что позволяет непосредственно рассматривать *observed* события.

Задача анализа - дать характеристики *produced* набора событий, в то время, как наблюдается *observed*. Неэффективность регистрации в результате геометрии установки или неэффективности приборов мы будем называть аксептанс установки, не разделяя эффекты. Таким образом, для получения информации о *produced* событиях необходимо обладать полными знаниями об аксептансе экспериментальной установки, этому вопросу было уделено много внимания.

## 4.3 Угловой анализ

### 4.3.1 Система Готфрида-Джексона

Системой Готфрида-Джексона называется такая система отсчета, в которой резонанс (сумма  $\pi^-$  и  $\pi^0$ ) покоится, ось Z совпадает с направлением пучка, ось X лежит в плоскости нуклона ( $N$ ) и отдачи ( $N'$ ) (см. рис. 4.4). В этой системе  $\pi^-$  и  $\pi^0$  летят в разные стороны. Углами Готфрида-Джексона и Треймана-Янга называются соответственно полярный и азимутальный углы вылета одной из вторичных частиц ( $\pi^-$  в нашем случае).

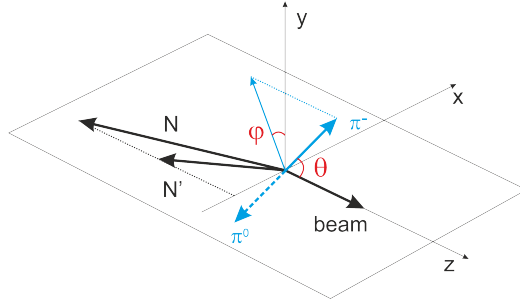


Рис. 4.4: Система Готфрида-Джексона - возможные направления частиц: пучкового пиона (*beam*),  $N$ ,  $N'$ , конечных частиц  $\pi^-\pi^0$

### 4.3.2 Рассматриваемые переменные

При фиксированной энергии и направлении пучка, а также вершины взаимодействия существует еще 7 независимых переменных, определение которых полностью фиксирует событие. Один из возможных наборов перечислен ниже:

- $M_{\pi^-\pi^0} = m$  инвариантная масса системы  $\pi^-\pi^0$ ;
- $t$  - квадрат переданного импульса из верхней вершины в нижнюю. Далее мы будем рассматривать переменную  $t' = t - t_{min}$ , где  $t_{min}$  - минимальное (по модулю) значение  $t$  при данной инвариантной массе системы и энергии пучка.
- $(\cos \theta_{GJ}, \phi_{TY})$  - направление вылета заряженного пиона в системе Готфрида-Джексона;
- $\phi_{LB}$  - лабораторный угол поворота всей системы целиком вокруг оси пучка;
- $\theta_\gamma, \phi_\gamma$  - углы распада  $\pi_0$  на два гамма-кванта в системе, где  $\pi_0$  покоится.

Далее мы будем говорить, что независимых переменных, определяющих событие всего четыре  $(M_{\pi^-\pi^0}, t', \cos \theta_{GJ}, \phi_{TY})$ , подразумевая, что по остальным трем производится усреднение. Стоит отметить, что поступать таким образом можно, т.к. мы уверены, что точно знаем вид распределения по  $\phi_{LB}$ ,  $\cos \theta_\gamma$  и  $\phi_\gamma$  - это равномерные распределения во всей соответствующей области определения.

Исключить из рассмотрения  $t'$ , перейдя к усреднению, по этой переменной не получается в связи с тем, что  $t'$ -распределение не является



тривиальным, а использование неправильной формы приводит к значимой ошибке.

## 4.4 Аксептанс

При выполнении углового анализа эффективность установки необходимо знать в терминах  $\cos \theta_{GJ}, \phi_{TY}$  для поправки измеренных распределений, однако, при изменении инвариантной массы системы и переданного импульса, влияние аксептанса может существенно измениться, поэтому, наряду с изучением  $\cos \theta_{GJ} \times \phi_{TY}$ , также будут интересны двумерные распределения  $\cos \theta_{GJ}, \phi_{TY} \times m$  и  $\cos \theta_{GJ}, \phi_{TY} \times t'$ . Переменная  $\phi_{TY}$  менее чувствительна к различным провалам эффективности в лабораторной системе отсчета. Поэтому основным инструментом для изучения будут корреляции  $\cos \theta_{GJ}$  с другими переменными  $(m, t')$ .

Для изучения аксептанса установки использовалась простая модель, включающая геометрию детекторов, триггерных приборов, магнитное поле и набор ограничений, симулирующих ограничения, налагаемые во время реконструкции. Достаточность такого описания косвенно подтверждается совпадением Монте-Карло-предсказаний на лабораторные распределения с измеряемыми (см. Приложение А).

Ограниченность чувствительных областей, особенности реконструкции, пороги регистрации упрощенно сводятся к набору ограничений:

- Попадание заряженного трека в апертуру трековых детекторов
- Не попадание трека в K1, K2.
- Попадание гамма-квантов от распада  $\pi^0$  в апертуру электромагнитного калориметра
- Минимальная энергия реконструкции гамма-квантов 0.5 ГэВ
- Невыполнение реконструкции гамма-кванта, слившегося с адроном в калориметре. Минимальное расстояние 20 см.

Было проверено, что распределения по "игрушечной" модели и по развернутой модели на основе Geant4 отличаются слабо.

### 4.4.1 Масс-зависимые эффекты

Выполним такой эксперимент: рассмотрим набор событий с распределениями:

$$\frac{dN}{dt'} \sim e^{-15|t'|}, \quad -t' \in [0, 1], \quad (4.1)$$

$$\frac{dN}{d \cos \theta_{GJ}} = const, \quad \cos \theta_{GJ} \in [-1, 1] \quad (4.2)$$

$$\frac{dN}{d\phi_{TY}} = const, \quad \phi_{TY} \in [-\pi, \pi] \quad (4.3)$$

для каждого массового интервала. Далее используя простую модель, получим распределения по  $\cos \theta_{GJ}$  против массы для событий, зарегистрированных в установке (рис.4.6 левый верхний).

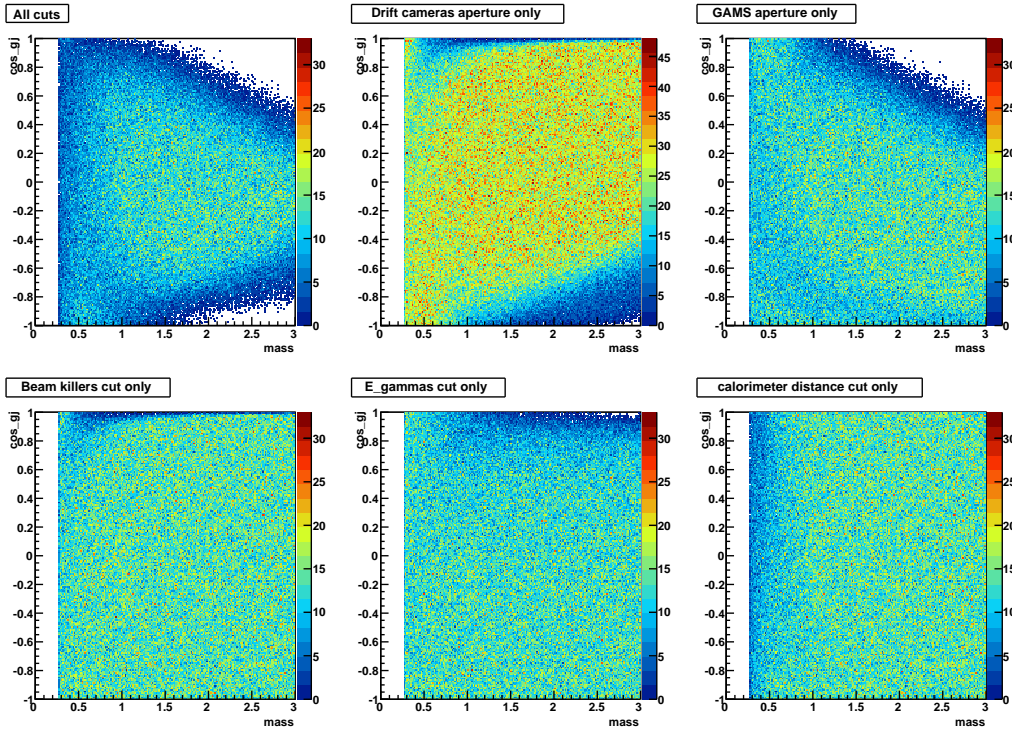


Рис. 4.5: Влияние разных ограничений на распределения по  $\cos \theta_{GJ} \times m_{\pi\pi}$ . Верхний левый биplot - результирующий после всех эффектов, другие распределения соответствуют включению в простую модель ограничений, соответствующих подписям.

- Самый значительный эффект, который бросается в глаза - это отсутствие событий для  $\cos \theta_{GJ} \approx \pm 1$  при больших инвариантных массах. Такие достаточно резкие эффекты связаны с ограниченной апертурой детекторов. Нижний белый треугольник соответствует ограничению для трековых детекторов (мягкий заряженный  $\pi^-$  не

попадает в аппаратуру станций дрейфовых камер). Верхний треугольник неэффективности - следствие ограниченности аппаратуры электромагнитного калориметра.

- Киллеры пучка убирают узкую полосу событий при  $\cos \theta_{GJ} \sim 1$  для малых масс (рис.4.6 левый нижний).
- Ограничение по энергии гамма-кантов  $E_\gamma > 0.5 \text{ ГэВ}$  влияет на те же события  $\cos \theta_{GJ} \sim 1$ , но уже при больших массах.  $\cos \theta_{GJ} \sim 1$  соответствует ситуации когда  $\pi^-$  уносит большую часть энергии (для малых  $t'$ ), таким образом оставляя гамма-кванты мягкими (рис.4.6 центральный нижний).
- ограничение на минимальное расстояние между адроном и центром кластера в калориметре снижает эффективность в области малых масс (рис.4.6 правый нижний), этого и следовало ожидать, т.к для малых углов и больших энергий ( $p_i \gg m_i$ ) можно написать приближенное выражение для угла разлета  $\pi^-$  и  $\pi^0$ .

$$\alpha^2 \approx \frac{m_{\pi\pi}^2}{p_{\pi^-} p_{\pi^0}} \quad (4.4)$$

#### 4.4.2 $t'$ -зависимые эффекты

Изучение зависимости неэффективности от  $t'$  проводилось на событиях в массовом интервале  $\rho$ -мезона (гауссово распределение со средним  $770 \text{ МэВ}/c^2$ , шириной  $150 \text{ МэВ}/c^2$ ), по остальным переменным события распределялись равномерно. После, поочередно включая и выключая различные детекторы, исследовалось их влияние.

Объяснение зависимости эффективности установки от значения переданного импульса достаточно затейливое. Важный факт заключается в том, что максимальное значение импульса  $\pi^-$  достигается вовсе не при  $\cos \theta_{GJ} = 1$ , а при значении  $\theta_{GJ} = \theta_0$ , являющегося функцией  $t'$ . Максимальный импульс  $\pi^-$  достигается, если в системе Готфрида-Джексона он летит против направления нуклона ( $N$ ), вдоль которого делается буст для перехода в лабораторную систему. Чем меньше  $t'$ , тем ближе к  $180^\circ$  угол между  $N$  и направлением пучковой частицы *beam* и уже область с заниженной эффективностью, вызванной мягкими гамма-квантами.

Подобным образом жесткая прямоугольная апертура дрейфовых камер в лабораторной системе приводит к появлению круглой области неэффективности (рис.4.7) в распределении  $\cos \theta_{GJ} \times \phi_{GJ}$ , положение центра которой  $\phi_{GJ} = 0$ ,  $\cos \theta_{GJ} = f(t)$  зависит от  $t$ .

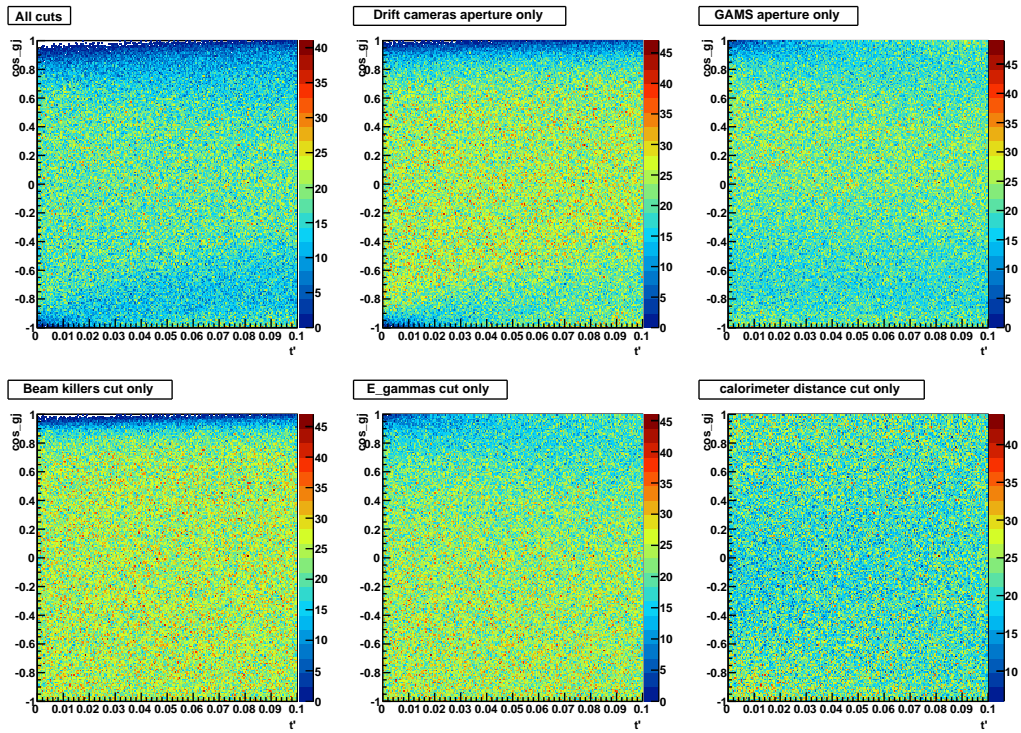


Рис. 4.6: Влияние разных ограничений на распределения по  $\cos \theta_{GJ} \times t'$ . Верхний левый биplot - результирующий после всех эффектов, другие распределения соответствуют включению в простую модель ограничений, соответствующих подписям.

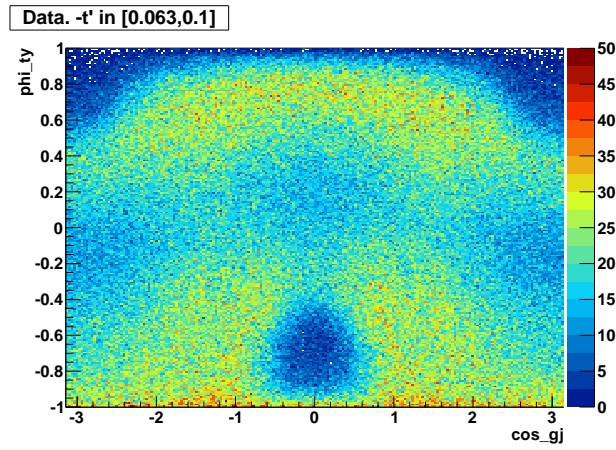


Рис. 4.7: Экспериментальное распределение по  $\cos \theta_{GJ}$  и  $\phi_{GJ}$  для событий из всего массового диапазона  $[0, 3] \text{ ГэВ}/c^2$ , при  $-t' \in [0.06, 0.1] (\text{ГэВ}/c)^2$ . Круглая область неэффективности при  $\phi_{GJ} = 0$ ,  $\cos \theta_{GJ} = -0.6$  является следствием потери мягких заряженных треков - непопадание в апертуру дрейфовых камер.

# Глава 5

## Метод моментов

Методом моментов называется разложение интенсивности как функции от углов  $(\theta_{GJ}, \phi_{TY})$  по сферическим гармоникам.

Извлечение моментов, т.е. коэффициентов при разных гармониках, является первым шагом в парциально-волновом анализе, позволяющем проверить базовые предположения и продемонстрировать самосогласованность результата. Среди задачи, можно выделить следующие основные:

- Продемонстрировать, что асимметрия угловых распределений относительно плоскости рождения отсутствует. Это позволит рассматривать амплитуду как не когерентную сумму членов с разной "натуральностью".
- Определить высший угловой момент, наблюдаемый в системе.
- Определить наибольшую непренебрежимую проекцию полного момента.

### 5.1 Формализм

Пусть  $I = I(M, t', \cos \theta, \phi)$  - интенсивность потока частиц как функция кинематических переменных. Если принять, что интенсивность является непрерывной функцией от  $\cos \theta$  и  $\phi$ , то при фиксированных массе и переданном импульсе  $I$  может быть представлена в виде ряда:

$$I(\cos \theta, \phi) = \sum_{\lambda} a_{\lambda} Y_{\lambda} \quad (5.1)$$

Здесь индекс  $\lambda$  нумерует базисные функции, в качестве которых будем использовать действительный набор сферических гармоник (базис "натуральности", будет обозначаться двумя точками над  $Y$ ), который определен следующим образом:

$$\ddot{Y}_\lambda \equiv \ddot{Y}_l^m = \begin{cases} \sqrt{2}N_{(l,m)}P_l^m(\cos\theta)\sin m\phi, & \text{ЕСЛИ } m > 0 \\ N_{(l,0)}P_l^m(\cos\theta), & \text{ЕСЛИ } m = 0 \\ \sqrt{2}N_{(l,|m|)}P_l^{|m|}(\cos\theta)\cos m\phi, & \text{ЕСЛИ } m < 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

$$I_{obs} = \sum a_\lambda Y_\lambda \quad (5.3)$$

Нормировочная константа определяется так:

$$N_{(l,|m|)} = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} \quad (5.4)$$

Получившийся базис является полным и ортонормированным в области  $(\cos\theta, \phi) \in \Omega_o = [-1, 1] \times [-\pi, \pi]$ . Таким образом любая непрерывная и кусочно гладкая функция, определенная на  $\Omega_o$ , равномерно сходится к функции - своему разложению по этому базису.

Если в качестве функции рассматривается интенсивность (дифференциальное сечение  $d\sigma/d\theta d\phi$ ), мы можем уменьшить число базисных функций, отбросив тем самым те, которые из физических соображений не должны давать вклада:

- **Ограничение максимального углового момента.** Легко показать, что если в амплитудном разложении есть волна с максимальным угловым моментом  $l_{max}$ , то в разложении интенсивности по сферическим гармоникам вклад гармоник с  $l > 2l_{max}$  будет нулевым.
- **Ограничение максимальной проекции углового момента.** Рассуждения, аналогичные предыдущим, верны и для проекции углового момента. На первый взгляд, можно было оставить в базисе для моментов только функции с  $m \leq 2$ . Однако это верно лишь для набора событий *produced*. После прохождения через установку большие проекции могут потребоваться для описания угловых распределений.
- **Симметрия интенсивности по углу Треймана-Янга.** Конструктивная особенность установки и триггера для двух-частичной реакции не может приводить к асимметрии в распределении по  $\phi_{TY}$ .

Интенсивность также инвариантна по отношению к преобразованию  $\phi_{TY} \rightarrow -\phi_{TY}$  благодаря отсутствию интерференции между амплитудами с разной "натуральностью".

Базис для разложения амплитуд может быть усечен до набора:  $\{\ddot{Y}_l^m\}$ , где  $l \leq 2l_{max}$ ,  $m \leq 2$ .

Соответственное разложение интенсивности для *produced* и *observed* набора событий выглядит следующим образом:<sup>1</sup>

$$I_{prod}(\cos \theta, \phi) = 4\pi \sum_{\lambda} t_{\lambda} \ddot{Y}_{\lambda} \quad I_{obs}(\cos \theta, \phi) = 4\pi \sum_{\lambda} b_{\lambda} \ddot{Y}_{\lambda} \quad (5.5)$$

Задача анализа заключалась в том, чтобы, опираясь на знание акцептанса установки и посчитав  $b_{\lambda}$  для полученных данных, отыскать  $t_{\lambda}$ , непосредственно связанные с физикой процесса.

$t$  мы будем называть *produced*-моментами, обозначать одним общим индексом  $t_{\lambda}$  или двумя  $t_{l,m}$ . Встречается также обозначение  $(l, m)$ .

## 5.2 Реализация

### 5.2.1 Метод линейной алгебры

Первый метод, предложенный Граером [3], был назван методом линейной алгебры и заключается в следующем: можно написать аналитическую связь  $I_{obs}$  и  $I_{prod}$  в виде:

$$I_{obs}(\cos \theta, \phi) = A(\cos \theta, \phi) \cdot I_{prod}(\cos \theta, \phi), \quad (5.6)$$

здесь  $A(\cos \theta, \phi)$  играет роль эффективности.

Коэффициенты разложения  $b_{\lambda}$  находятся следующим образом.

$$b_{\lambda} = \langle \ddot{Y}_{\lambda} \rangle = \frac{1}{4\pi} \int I_{obs} \ddot{Y}_{\lambda} d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int A \cdot I_{obs} \ddot{Y}_{\lambda} d\Omega = \quad (5.7)$$

$$= t_{\lambda'} \int \ddot{Y}_{\lambda'} A \ddot{Y}_{\lambda} d\Omega = A_{\lambda\lambda'} t_{\lambda'}, \quad \text{т.е. } b_{\lambda} = A_{\lambda\lambda'} t_{\lambda'} \quad (5.8)$$

Решение этой системы уравнения дается простой формулой:

$$t_{\lambda'} = (A^{-1})_{\lambda'\lambda} b_{\lambda} \quad (5.9)$$

---

<sup>1</sup>Множитель  $4\pi$  введен для того, чтобы получение момента (см. формулу (5.7)) соответствовало усреднению базисной функции по всему пространству с весом  $I$



Чтобы посчитать интегралы  $A_{\lambda\lambda'}$ , используется МС модель установки,  $b_\lambda$  определяется по данным (*observed*).

Этот метод мы в дальнейшем будем называть **простым методом линейной алгебры**.

Моменты, полученные этим методом вплоть до  $l = 6$ , приведены в Приложении В. Сигнал от  $\rho$ -мезона доминирует во всех моментах с  $l \leq 2l_{max}^\rho = 2$ . На моменте (6,0) прослеживается резонансная форма  $\rho_3$ -мезона. Недописание аксептанса установки проявляется как паразитный сигнал под  $\rho$ -мезоном с моментах (4, 0) и (6, 0).

Ожидается, что волны с проекцией  $> 1$  не рождаются, а, значит, значения моментов с проекцией  $> 2$  должно быть мало. Согласно полученным измерениям, (3, 3) составляет 5% от (0, 0). Более высокие проекции подавлены еще сильнее.

## 5.2.2 Расширенный метод линейной алгебры

Рассмотрим, что представляют из себя  $\lambda$  и  $\lambda'$ . Простой метод линейной алгебры будет применим только, если базисы совпадают (для обращения матрица  $A$  должна быть квадратной), однако, мы можем избавиться от этого ограничения.

Предположим, мы знаем, что в данном интервале масс амплитуда содержит лишь  $D$ -волну. Следовательно, при разложении интенсивности *produced* набора событий отличными от нуля окажутся только коэффициенты при  $\ddot{Y}_{0,0}$ ,  $\ddot{Y}_{2,0}$ ,  $\ddot{Y}_{2,-2}$ ,  $\ddot{Y}_{4,0}$ ,  $\ddot{Y}_{4,-2}$ . Конечно, это не означает, что в *observed*-базисе отличные от перечисленных моменты будут нулями - благодаря влиянию установки появятся паразитные гармоники.

Правильное знание аксептанса позволит отыскать *produced*-моменты, и убедиться, что, например  $t_{1,-1} = 0$ . В реальности измеренные моменты, как и матрица аксептанса, имеют ошибки, а т.к. мы обладаем априорным знанием о том, что некоторые моменты должны быть нулями, мы можем использовать это для получения более точной оценки для ненулевых моментов <sup>2</sup>

Если штрихованный базис (*observed*) шире не штрихованного (*produced*), система линейных уравнений 5.9 не может быть решена точно. В этом случае можно определить решение методом  $\chi^2$ , зная ошибки для  $b_\lambda$ .

$$\chi^2 = (b - At)^T E^{-1} (b - At) \quad (5.10)$$

---

<sup>2</sup>К сожалению, предлагаемый ниже метод не имеет за собой строгого математического доказательства эффективности оценки

здесь  $E$  - матрица ошибок  $b_\lambda$ , посчитанная согласно формуле 5.11.

$$E_{i,j} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_0} I_{obs} \ddot{Y}_i \ddot{Y}_j d\Omega - \left( \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_0} I_{obs} \ddot{Y}_i d\Omega \right) \left( \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_0} I_{obs} \ddot{Y}_j d\Omega \right) \quad (5.11)$$

Проблема заключается в том, что ошибка и всевозможные корреляции для  $b_0$  равны нулю, таким образом, матрица  $E$  имеет нулевые первую строку и столбец и, следовательно, не имеет обратной. В работе Грайера [3] в качестве матрицы  $E$  предлагается использовать следующее выражение:

$$E_{ij} = \int I_{obs} \ddot{Y}_i \ddot{Y}_j d\Omega, \quad (5.12)$$

которое не понятно автору данной работы, поэтому действовать будем по-другому. Используем условие  $b_0 = \sum_\lambda A_{0,\lambda} t_\lambda$ , как уравнение связи, и при помощи метода Лагранжа введем его в выражение для минимизации:

$$N = (b - \hat{A}t)^T \hat{E}^{-1} (b - \hat{A}t) + x(b_0 - A_{0,\lambda} t_\lambda) \quad (5.13)$$

для усеченных матрицы  $E$  и  $A$  введено обозначение  $\hat{E}$  и  $\hat{A}$ , также нам понадобится матрица  $Q$  и матрица  $R$ , определенные как

$$Q = \hat{E}^{-1} + (\hat{E}^{-1})^T, \quad R = \hat{A}^T Q \hat{A}, \quad q_\lambda = A_{0,\lambda} \quad (5.14)$$

Функция (5.13)  $N(t_\lambda, x)$  имеет минимум при следующих значениях параметров ( $x^{loc}$ ,  $t^{loc}$ ):

$$x^{loc} = \frac{b_0 - q^T R^{-1} \hat{A}^T Q b}{q^T R^{-1} q} \quad (5.15)$$

$$t^{loc} = R^{-1} \hat{A}^T Q b + x^{loc} T^{-1} q \quad (5.16)$$

Такое решение будем называть **расширенным методом линейной алгебры**.

Получившиеся значения моментов приведены в Приложении В. В изучаемом интервале масс (до  $1.2 \text{ ГэВ}/c^2$ ) значения, полученные двумя методами, совпадают. Наблюдаются сильные расхождения решений для больших масс, т.е. в областях низкой эффективности.

Минусом изложенных методов является то, что аксептанс должен быть явно разложен по выбранному базису, этот недостаток легко продемонстрировать на примере. Пусть аксептанс устроен так, что события с  $\cos \theta_{GJ} > 0.9$  не могут быть зарегистрированы, чтобы описать резкий скачок эффективности, необходимо расширить базис до больших значений  $L$ , что увеличивает ошибку, приводит к вырождению матрицы  $A$ . Кроме того, по мере снижения аксептанса (переходу к большим массам), диагональные члены в матрице аксептанса уменьшаются и начинают сравниваться с недиагональными, что опять же приводит к вырождению.

## Глава 6

# Парциально-волновой анализ. Извлечение Амплитуд.

Плотность вероятности для вылета  $\pi^-$  в некий телесный угол  $\Omega$  в системе Готфрида-Джексона может быть переписана через матрицу плотности  $M_{pq}$  с :

$$\rho_{obs}(\Omega, x_i) = \sum M_{pq}(x_i) \ddot{Y}_p(\Omega) \ddot{Y}_q(\Omega) \quad (6.1)$$

Из предположения об определенной четности распределений относительно плоскости рождения ( $\phi_{TY}$ ) следует, что амплитуды с разными симметричными свойствами относительно  $\phi_{TY} \rightarrow -\phi_{TY}$  не интерферируют. Таким образом, плотность вероятности для  $I_{prod}$  состоит из в двух не интерферирующих блоков. Если для описания данных необходимо только две волны  $S$  и  $P$ , пока ненормированная плотность вероятности  $\rho_{prod}$  (вопрос о нормировки разобран ниже) выглядит следующим образом:

$$\rho_{obs}(\Omega, x_i) = |x_{p+}P_+|^2 + |x_{p0}P_0 + x_{p-}P_- + x_sS_0|^2, \quad (6.2)$$

где  $\{x_i\}$  произвольные комплексные числа. Количество определяемых параметров равно 6, они могут быть выбраны следующим образом: <sup>1</sup>

- абсолютные значения амплитуд ( $|x_{p+}|$ ,  $|x_{p0}|$ ,  $|x_{p-}|$ ,  $|x_s|$ ) или интенсивностей ( $|x_{p+}|^2$ ,  $|x_{p0}|^2$ ,  $|x_{p-}|^2$ ,  $|x_s|^2$ )
- относительные фазы волн, которые можно определить  $\phi_{p-} \equiv Arg(x_{p-}) - Arg(x_{p0})$  и  $\phi_{x_s} \equiv Arg(x_s) - Arg(x_{p0})$ .

---

<sup>1</sup>Количество ненулевых моментов возникающих в системе  $S, P$  волн равно тоже 6. Это значит, что введение отличной от (6.2) плотности вероятности с большим числом параметров приведет к появлению непрерывной неоднозначности в параметрах.

Для *observed* набора событий плотность вероятности будет отличаться на множитель эффективности.

$$\rho_{obs}(\Omega, x_i) = A(\Omega) \rho_{prod}(\Omega, x_i) \quad (6.3)$$

Плотность вероятности для *observed* набора нормируем на единицу, т.к. именно ее будем использовать для фита наблюдаемых распределений.

$$\rho_{obs}^N(\Omega, x_i) = \frac{A(\Omega) \rho_{prod}(\Omega, x_i)}{\int A \rho_{prod} d\Omega} \quad (6.4)$$

## 6.1 Формализм. Расширенный метод максимума правдоподобия

Устойчивую, асимптотически несмещенную и эффективную оценку параметров  $\{x_i\}$  дает минимум функционала (т.н. "правдоподобия")

$$L(x_i) = \prod_{m=1}^{N_{obs}} \rho_{obs}^N(\Omega_m, x_i), \quad (6.5)$$

где произведение берется по всем зарегистрированным событиям  $N_{obs}$ .

Расширение метода максимума правдоподобия заключается в учете того, что процессы, позволяющие зарегистрировать частицу, имеют бернуллиевский характер, а это приводит к распределению Пуассона для количества зарегистрированных частиц. Приняв  $\mu = N_{obs} \int A \rho_{prod} d\Omega$ . Функция  $L(x_i)$  должна быть переписана в след. виде:

$$L^E(x_i) = \left( \frac{\mu^{N_{obs}} e^{-\mu}}{N_{obs}!} \right) \prod_{m=1}^{N_{obs}} \frac{A(\Omega_m) \rho_{prod}(\Omega_m, x_i)}{\int A \rho_{prod} d\Omega} \quad (6.6)$$

Максимум логарифма функции  $L^E(x_i)$  дает те же значение для оценки параметров.

$$\log L^E(x_i) = N_{obs} \log \mu - \log N_{obs}! - \mu + \sum \log A + \sum \log \rho_{prod} - \sum \log \int A \rho_{prod} d\Omega \quad (6.7)$$

Избавимся от слагаемых, не зависящих от параметров  $x_i$ , и оставим члены с первым порядком по  $N_{obs}$ . Перепишем со знаком минус, так чтобы оценка параметров давалась минимумом функции

$$LK(x_i) = - \sum_{m=1}^{N_{obs}} \log \rho_{prod}(\Omega_m, x_i) + N_{obs} \int A(\Omega) \rho_{prod}(\Omega, x_i) d\Omega \quad (6.8)$$

## 6.2 Реализация

Более удобно для реализации рассматривать действительные параметры, с этой целью можно переписать функционал (6.8) так:

$$\begin{aligned} \rho_{obs} &= \sum M_{pq} Y_p Y_q = |x_1 P_+|^2 + |x_2 P_+|^2 + \\ &+ |x_3 P_0 + x_4 P_- + x_5 S_0|^2 + |x_6 P_0 + x_7 P_- + x_8 S_0|^2 = \\ &= Sp \left[ \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_3^2 + x_6^2 & x_3 x_4 + x_6 x_7 & x_3 x_5 + x_6 x_8 \\ 0 & x_3 x_4 + x_6 x_7 & x_4^2 + x_7^2 & x_4 x_5 + x_7 x_8 \\ 0 & x_3 x_5 + x_6 x_8 & x_4 x_5 + x_7 x_8 & x_5^2 + x_8^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Y_p Y_q \end{pmatrix}_{\substack{p=1..4 \\ q=1..4}} \right] \end{aligned} \quad (6.9)$$

Аналогично расписывается выражение для интеграла:

$$\int A \rho_{prod} d\Omega = \sum_{p,q} M_{pq} \int A Y_p(\Omega) Y_q(\Omega) d\Omega, \quad (6.10)$$

матрица интегралов  $\int A Y_p(\Omega) Y_q(\Omega)$  посчитана методом Монте-Карло, используя модель установки.

Для минимизации использовался программный пакет Minuit. Первые производные были посчитаны аналитически, матрица ошибок оценивалась численно.

После получения значений параметров  $x_i$  выполнялся пересчет ошибок к "физическим" величинам, которыми являются  $x_{p-}^2$ ,  $x_{p+}^2$ ,  $x_{p0}^2$ , а также  $\phi_{p-}$  и  $\phi_s$ , используя процедуру переноса ошибок.

## 6.3 Неоднозначности

К сожалению, невозможно однозначно определить значения и фазы амплитуд, однако, если модель содержит только две волны -  $S, P$ , тогда количество дискретных неоднозначностей, называемых "Барлетовы Нули", только две. Можно явно выписать систему уравнений, связывающую моменты (однозначно измеряемые величины) и амплитуды. Эти соотношения найдены в общем виде в работе [1] и ниже переписаны в соответствии с обозначениями, принятыми в данной работе:

$$\begin{aligned}
\sqrt{4\pi}t_{0,0} &= S_0^2 + P_0^2 + P_-^2 + P_+^2 \\
\sqrt{\frac{2\pi}{3}}t_{1,0} &= \frac{1}{\sqrt{3}}S_0P_0 \\
\sqrt{\frac{4\pi}{3}}t_{1,-1} &= \frac{1}{\sqrt{6}}S_0P_- \\
\sqrt{\frac{2\pi}{5}}t_{2,0} &= \frac{2}{5}P_0^2 - \frac{1}{5}(P_-^2 + P_+^2) \\
\sqrt{\frac{4\pi}{5}}t_{2,-1} &= \frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}P_0P_- \\
\sqrt{\frac{4\pi}{5}}t_{2,-2} &= \frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}(P_-^2 - P_+^2)
\end{aligned} \tag{6.11}$$

В нашем случае для системы  $\pi^-\pi^0$  в массовом интервале  $\rho$ -мезона неоднозначности разделяются на физическое решение и нефизическое привлечением знания о малости  $S$ -волны. Типичные распределения по парциальным волнам представлены на рисунке:

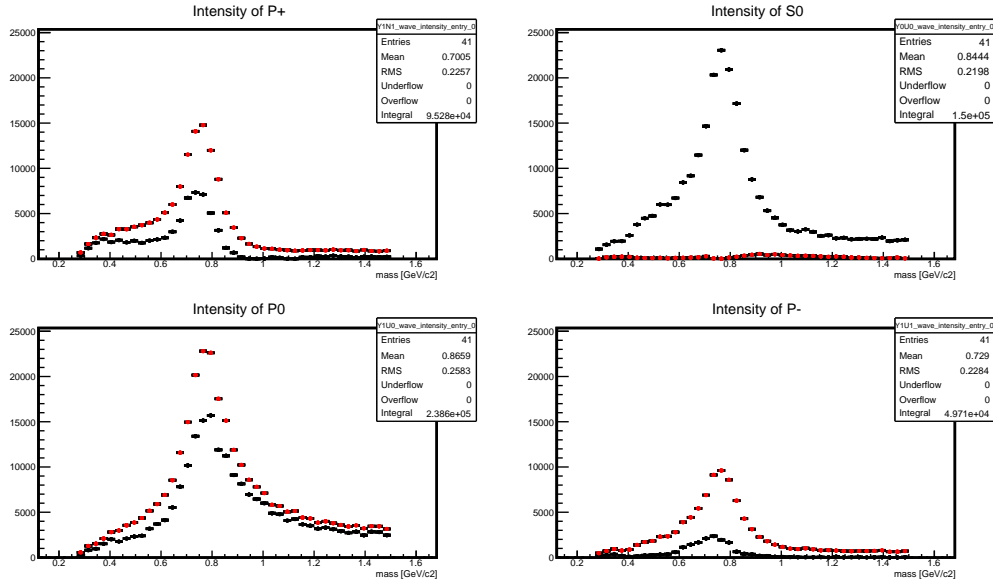


Рис. 6.1: Решения, полученные в результате парциально-волнового анализа для каждого массового интервала и диапазона по  $-t'$  от  $0.066$  (ГэВ/с)<sup>2</sup> до  $0.083$  (ГэВ/с)<sup>2</sup>. Анализ проводился 10 раз в каждом массовом интервале с различными стартовыми значениями, таким образом обе неоднозначности найдены.

Только решения, помеченные красным маркером, представляют физический интерес, потому что соответствуют малой  $S$ -волне, как мы и ожидаем.

Естественно, при пересчете разных амплитудных решений к значениям моментов по формулам 6.11, мы будем получать однозначные решения, которые могут быть сравнены с моментами, полученными методом линейной алгебры. Возможно поступить иначе: используя тот же самый формализм расширенного метода максимума правдоподобия, в качестве плотности вероятности выбрать функцию, параметризованную через моменты. Такое упражнение проделано, сравнения результатов приведено в Приложении В.

## Глава 7

# ПВА анализ для разных значений переданного импульса

В предыдущих разделах изложены основные методы работы с данными и формализм анализа. В данной главе рассмотрены результаты парциально-волнового анализа, который был проведен в разных бинах по  $t'$  с целью определить  $t'$ -зависимости разных парциальных волн, определяемые реальными физическими процессами.

Весь интервал по  $-t'$  от 0 до  $1 \text{ (ГэВ/с)}^2$  был разделен на 16 интервалов с равной статистикой, как показано на рисунке 7.1. Интервалы по  $m_{\pi\pi}$  были одинаковые 30 МэВ.

Для изучения стабильности решения, по отношению к тем или иным ограничениям, парциально-волновой анализ проводился огромное число раз с разными условиями. Как отмечалось, область  $\cos \theta_{GJ} \approx 1$  не описывается в рамках простой геометрической модели установки, поэтому было принято решение исключить ее из анализа <sup>1</sup>.

Все ограничения, накладываемые на данные, перечислены ниже:

- Попадание треков частиц (заряженной частицы и  $\gamma$ -квантов) в апертуру детекторов (все камеры и калориметр)
- Непопадание трека заряженной частицы в K1, K2.
- $E_\gamma > 0.5 \text{ ГэВ}$
- Расстояние между треком и ближайшим гамма-квантом на плоскости калориметра  $> 20 \text{ см}$ .

---

<sup>1</sup>Парциально-волновой анализ, в отличии от метода моментов, позволяет накладывать ограничения непосредственно на угловые переменные.



- <sup>2</sup>  $\cos \theta_{GJ} < 0.9$ .
- Энергия  $\pi\pi$ -системы  $E_{\pi\pi} \in [26, 31]$  ГэВ
- Продольная координата восстановленной вершины  $v_z$  близка к центру мишени  $v_z^0$ ,  $v_z \in [v_z^0 - 8 \text{ см}, v_z^0 + 8 \text{ см}]$ .
- $m_{\gamma\gamma} \in [115, 155]$  МэВ.

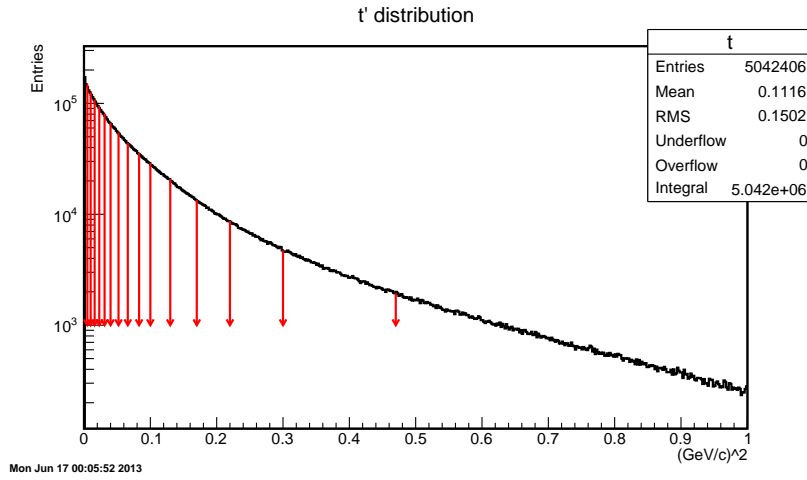


Рис. 7.1: Разбиение данных по переданному импульсу на наборы с равной статистикой.

Амплитуда состояла из двух волн ( $S$  и  $P$ ), входящих в выражение, как обсуждалось в предыдущих секциях (см. формулу 6.2). Из двух найденных решений выбиралось одно, соответствующее минимальной  $S$ -волне. В результате анализа мы имеем 48 распределений по  $m_{\pi\pi}$  для разных парциальных волн (16 бинов по  $t' \times 3$  значимые волны  $P_0, P_-, P_+$ ). Все результаты приведены в Приложении С. Распределения фитировались для получения итоговой картины.

## 7.1 Модель фита

Сигнал  $\rho$ -мезона описывался резонансной релятивистской формулой Брейта-Вигнера с динамической шириной [2], содержащей так называемый проникающий множитель с известным радиусом  $R = 5 (\text{ГэВ}/c)^{-1}$  [PDG].

<sup>2</sup>Угловой анализ в бинах по  $t'$  был проделан без этого ограничения. Выводы, которые будут сделаны, оставались теми же, хотя описание данных ухудшается

Введены обозначения:  $M, \Gamma_0$  - масса и ширина  $\rho$ -мезона,  $m$  - инвариантная масса в системе  $\pi^-\pi^0$ .

$$\mathbf{S} = \frac{1}{I_S} \times \frac{M\Gamma(m)}{(m^2 - M^2)^2 + (M\Gamma(m))^2}, \quad \Gamma(m) = \Gamma_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^3 \frac{M}{m} \frac{1 + R^2 p_0^2}{1 + R^2 p^2}, \quad (7.1)$$

где  $p = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - (m_{\pi^0} + m_{\pi^-})}$ ,  $p_0 = \frac{1}{2}\sqrt{m_0^2 - (m_{\pi^0} + m_{\pi^-})}$ . Функция нормирована на единицу ( $I_S$  множитель) в массовом интервале  $[0.39, 1.11]$  ГэВ/ $c^2$ , в котором производится фит.

Для описания фона была взята простая функция с экспоненциальным затуханием и правильным фазовым поведением на пороге:

$$\mathbf{B} = \frac{p^3 e^{-\beta m}}{\int_{m_{low}}^{m_{high}} p^3 e^{-\beta m} dm} \quad (7.2)$$

Сигнал  $\rho$ -мезона и фон были сложены когерентно, при этом предполагалось, что фаза сигнала  $\phi_{BW}(m)$  соответствует функции Брейта-Вигнера, а фаза фона  $\phi_B$  - константа.

$$\phi_{BW}(m) = \arctan \frac{M\Gamma(m)}{m^2 - M^2} \quad (7.3)$$

Ниже выписана функция которая использовалась для фита (нормировка опущена).

$$\begin{aligned} & \left| \sqrt{f_{sig}} \mathbf{S} e^{i\phi_{BW}(m)} + \sqrt{(1 - f_{sig})} \mathbf{B} e^{i\phi_B} \right|^2 = \\ & = f_{sig} \mathbf{S} + (1 - f_{sig}) \mathbf{B} + 2\sqrt{f_{sig}(1 - f_{sig})} \sqrt{\mathbf{S} \mathbf{B}} \cos(\phi_{BW}(m) - \phi_B) \end{aligned} \quad (7.4)$$

Пробовались различные варианты фита, фиксируя одни, ослабляя другие переменные. Финальные распределения будут приведены для фита с параметрами:

- Масса( $M$ ) и ширина( $\Gamma_0$ )  $\rho$ -мезона.
- Показатель в экспоненте для фона  $\beta$ .
- Вклад сигнала, точнее  $f_{sig}$ .

Фаза фона была зафиксирована для всех бинов по  $t'$ . Это физически обосновано и позволило избежать резких скачков в  $f_{sig}$  между соседними бинами.

Фит осуществлялся методом  $\chi^2$ , используя RooFit библиотеки. Нормирование функций для фона и сигнала уменьшило корреляцию параметров и улучшило сходимость.

Одно из отфитированных распределений приведено на рисунке 7.2

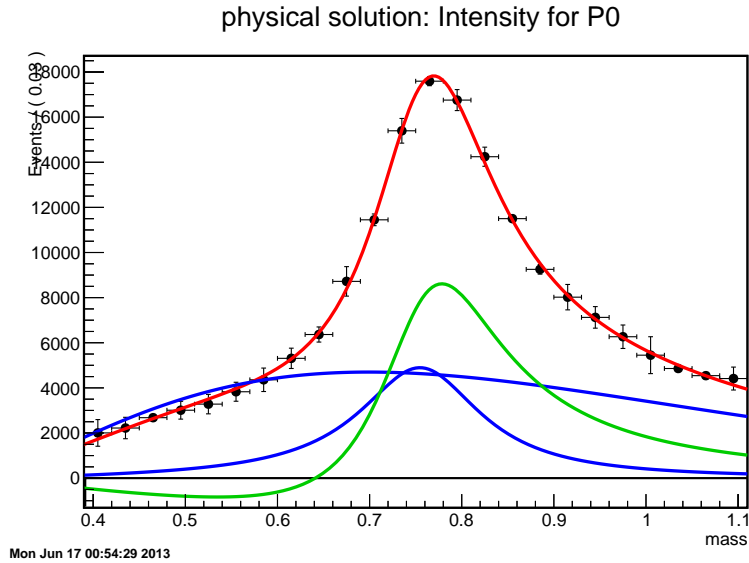


Рис. 7.2: Распределение по инвариантной массе для  $t' \in [0.08, 0.1]$  (ГэВ/с)<sup>2</sup>. Вклады отдельных слагаемых в формулу 7.4 показаны синими (функция Брейта-Вигнера и фон) и зеленой (интерференция)

## 7.2 Результаты

Начать обсуждение результатов хотелось бы с массы и ширины  $\rho$ -мезона (см. рис. 7.3,7.4). Целью нашей работы не являлось измерение параметров  $\rho$ -мезона; близость полученных значений к табличным говорит о качестве модели фита. На приведенных распределениях отложены только статистические ошибки, изучение систематики будет посещена дальнейшая работа.

Интерес представляет вклад  $\rho$ -мезона (функция Брейта-Вигнера) в полное измеренное число событий (рис. 7.5) для разных парциальных волн при разных переданных импульсах, необходимо помнить, что вклад интерференционного члена значительный.

$$1 = f_S + f_B + f_I \neq f_S + f_B$$

Рассмотрим, как выглядят распределения по  $t'$  для разных парциальных волн. Необходимо оценить значение в центре бина по  $t'$ , т.е. значение функции, зная только ее интеграл (количество событий). Это можно сде-

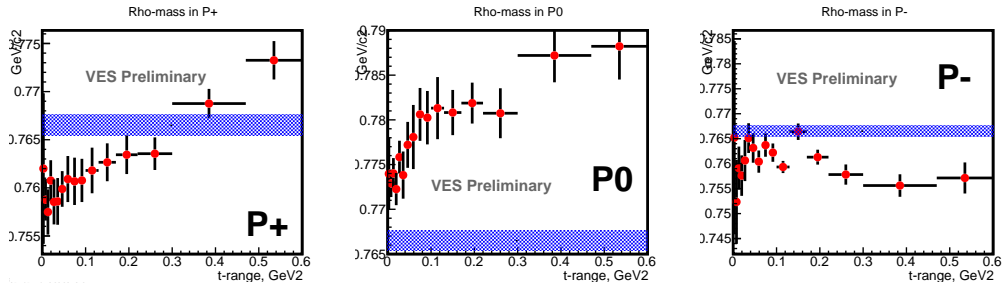


Рис. 7.3: Значение массы  $\rho$ -мезона, как результат фита при разных значениях переданного импульса. Синяя полоса соответствует табличному значению массы в адронном канале с соответствующей ошибкой

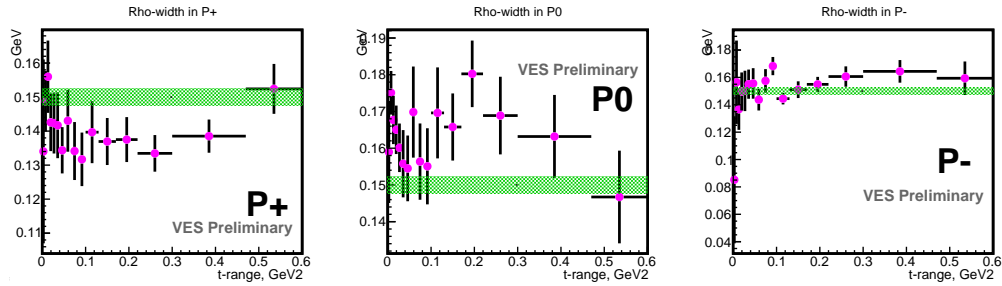


Рис. 7.4: Значение ширины  $\rho$ -мезона, как результат фита при разных значениях переданного импульса. Зеленая полоса соответствует табличному значению ширины в адронном канале с соответствующей ошибкой.

лать с точностью до второй производной от искомой функции.

$$I = \int_{x_0-l/2}^{x_0+l/2} f(x) \approx f(x_0)l + \frac{f''(x_0)}{12}l^3 \quad (7.5)$$

На графике 7.6 нанесено число полученных событий в бине, деленное на ширину бина.

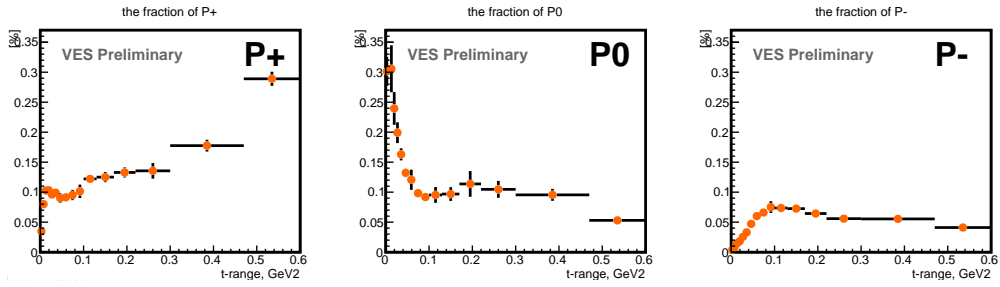


Рис. 7.5: Вклад  $\rho$ -мезона в полное число событий.

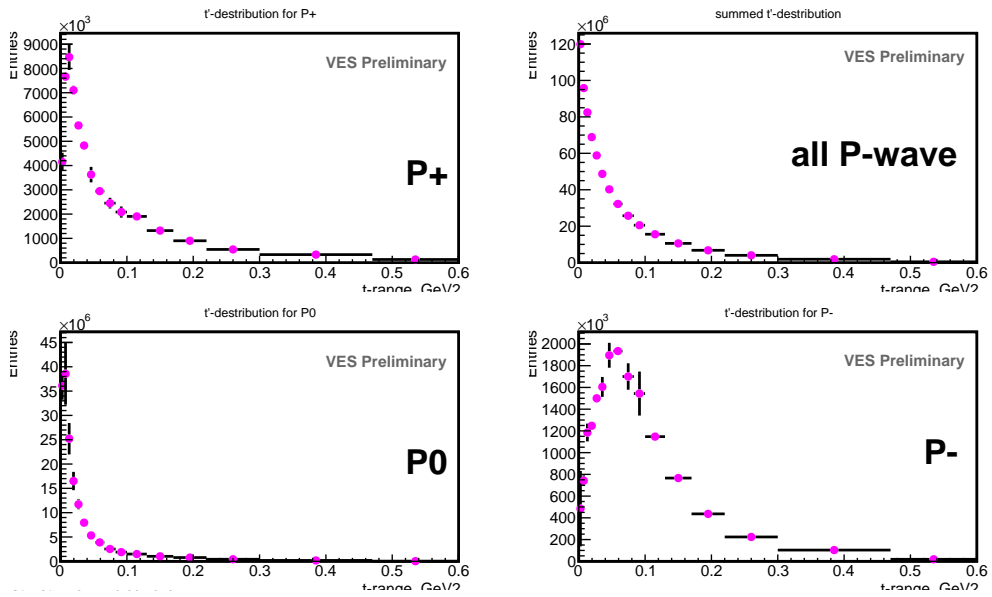


Рис. 7.6:  $t'$ -распределение для разных парциальных волн и их суммы.

# Глава 8

## Заключение

Рекордная статистика позволит детально исследовать механизмы образования системы  $\pi^-\pi^0$  в широкой области масс. Предварительные выводы по результатам представленного парциально-волнового анализа в области масс до  $1.2 \text{ ГэВ}/c^2$  следующие:

- Выбор физически обоснованного решения с минимальной  $S$ -волной позволяет устранить дискретную неоднозначность решений ПВА.
- Наблюдается широкий  $P$ -волновой фон под  $\rho$ -мезоном. При включении фона в модель когерентно, его удалось описать весьма простой формой, с сильной результирующей интерференцией с сигналом. Однако источники (механизмы) образования фона не ясны и требуют дальнейшего изучения.
- Вклад проекционных волн значителен, как в фон, так и в  $\rho$ -мезон.
- $P_0$ -волна, которой соответствует однопионный обмен (ОПЕ), доминирует при малых  $t'$ .
- Все  $P$  волны имеют завал при малых  $t'$ , однако их  $t'$ -зависимости различные. Объяснение такого поведения и построение теоретических предсказаний должно стать темой дальнейших исследований.

# Литература

- [1] S. U. Chung, "Techniques of amplitude analysis for two pseudoscalar systems," Phys. Rev. D **56**, 7299 (1997).
- [2] J. Pisut and M. Roos, "The rho meson shape," Nucl. Phys. B **6** (1968) 325.
- [3] G. Grayer, B. Hyams, C. Jones, P. Schlein, P. Weilhammer, W. Blum, H. Dietl and W. Koch *et al.*, "High Statistics Study of the Reaction  $\pi^- p \rightarrow \pi^- \pi^+ n$ : Apparatus, Method of Analysis, and General Features of Results at 17-GeV/c," Nucl. Phys. B **75** (1974) 189.
- [4] B. Y. Oh, A. F. Garfinkel, R. Morse, W. D. Walker, J. D. Prentice, E. C. West and T. S. Yoon, "Pi pi scattering up to 1.4 gev of dipion mass," Phys. Rev. D **1** (1970) 2494.
- [5] L. Byerly, R. Anthony, C. T. Coffin, E. Meanley, D. I. Meyer, J. Rice, N. R. Stanton and K. M. Terwilliger, "Rho production and decay in the reaction  $\pi^- p \rightarrow \pi^- \pi^0 p$  at 5 gev/c," Phys. Rev. D **7** (1973) 637.
- [6] С.А. Садовский, "О выборе функционала минимизации в парциально-волновом анализе," Доклады Академии наук СССР, том 319 **1** (1991) 165.

# Приложение А

## Сравнение предсказанных и наблюдаемых распределений

Чтобы продемонстрировать отсутствие грубых ошибок в описании угловых распределений (при помощи моментов или амплитуд), производится следующее упражнение: используя полученные решения, конструируется плотность вероятности углового распределения, на основе которой генерируется набор событий, называемый *predict*<sup>1</sup>.

Используя модель установки, *predict*-события протягиваются через неё и подвергаются тем же отборам что и данные, после чего, получившиеся распределения могут быть сравнены.

Именно такое сравнение, выполненное для одного бина по массе и конкретного интервала по  $t'$

$$m_{\pi\pi} \in [0.75, 0.78] \text{ ГэВ}/c^2, \quad t' \in [0.083, 0.1] (\text{ГэВ}/c)^2$$

продемонстрировано на рис. (А.1-А.7)

На рисунках одномерные распределения накладываются друг на друга (черная линия соответствует данным, красная - предсказаниям), двумерные изображаются поочередно: сначала для данных, затем для *predict*.

---

<sup>1</sup> Английский глагол, используемый в работе как жаргонное существительное, относящееся к набору событий



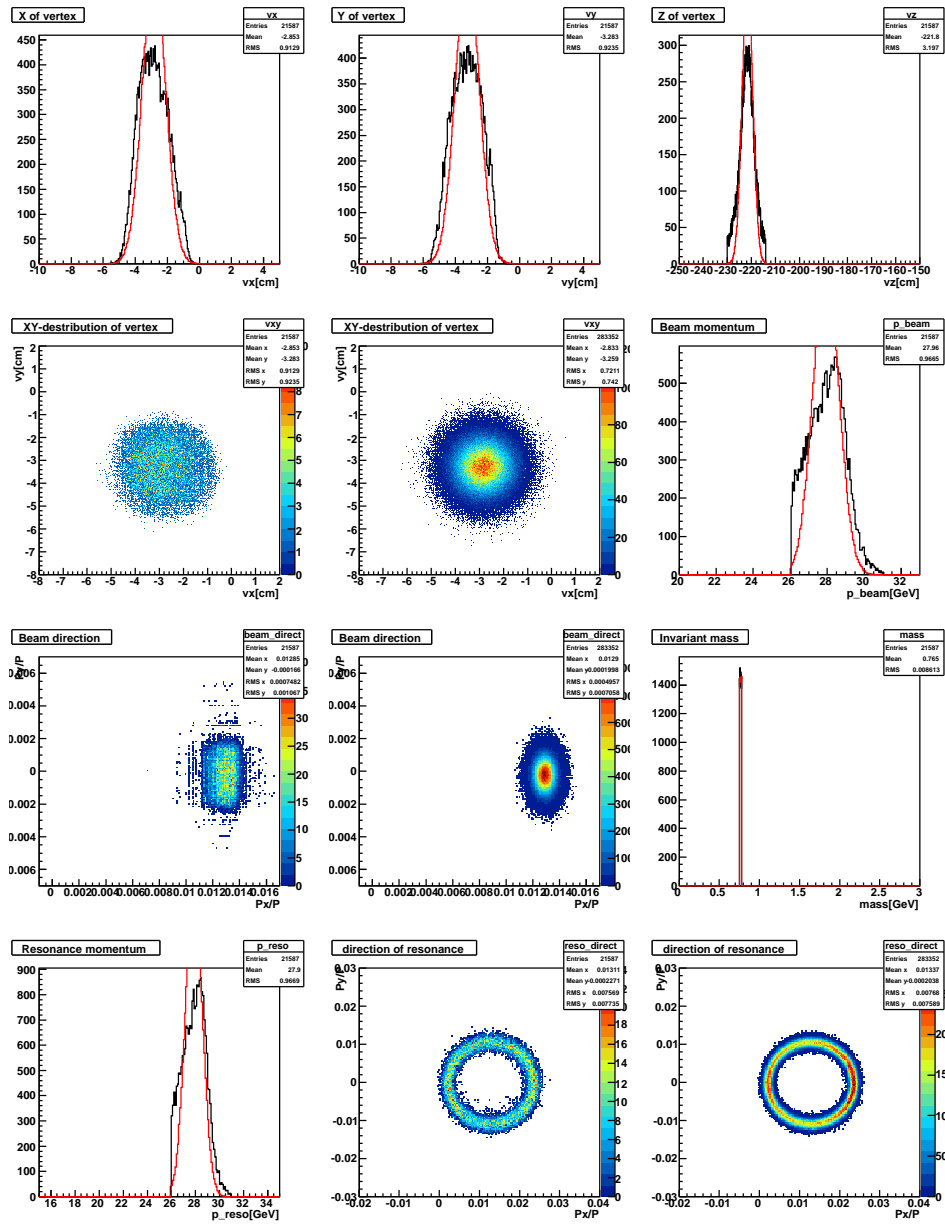


Рис. А.1: Сравнение распределений для данных (черная линия) и решений, полученных при угловом анализе (красная линия).

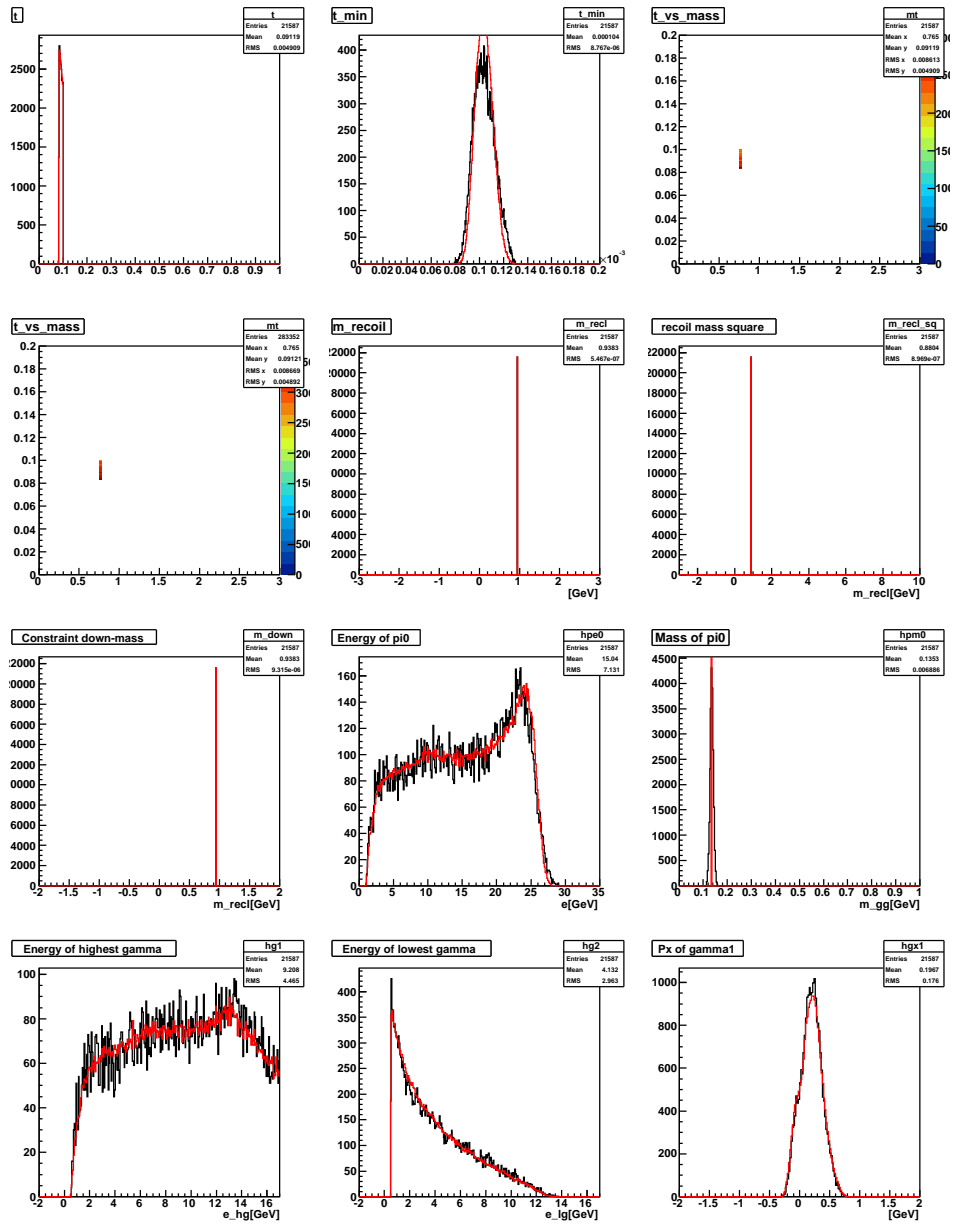


Рис. А.2: (продолжение). Сравнение распределений для данных (черная линия) и решений, полученных при угловом анализе (красная линия).

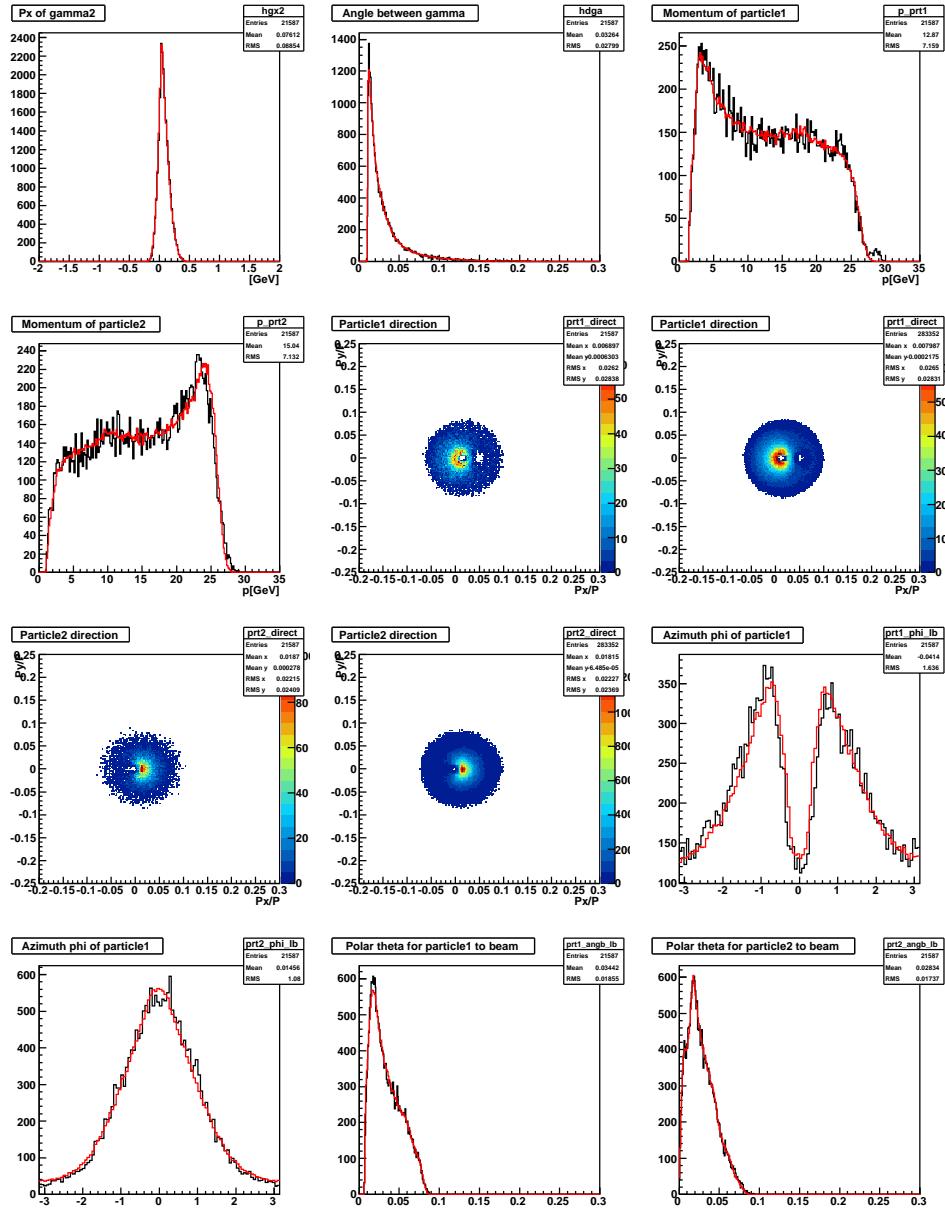


Рис. А.3: (продолжение). Сравнение распределений для данных (черная линия) и решений, полученных при угловом анализе (красная линия). **Particle1** назван  $\pi^-$ , **Particle2** –  $\pi^0$ .

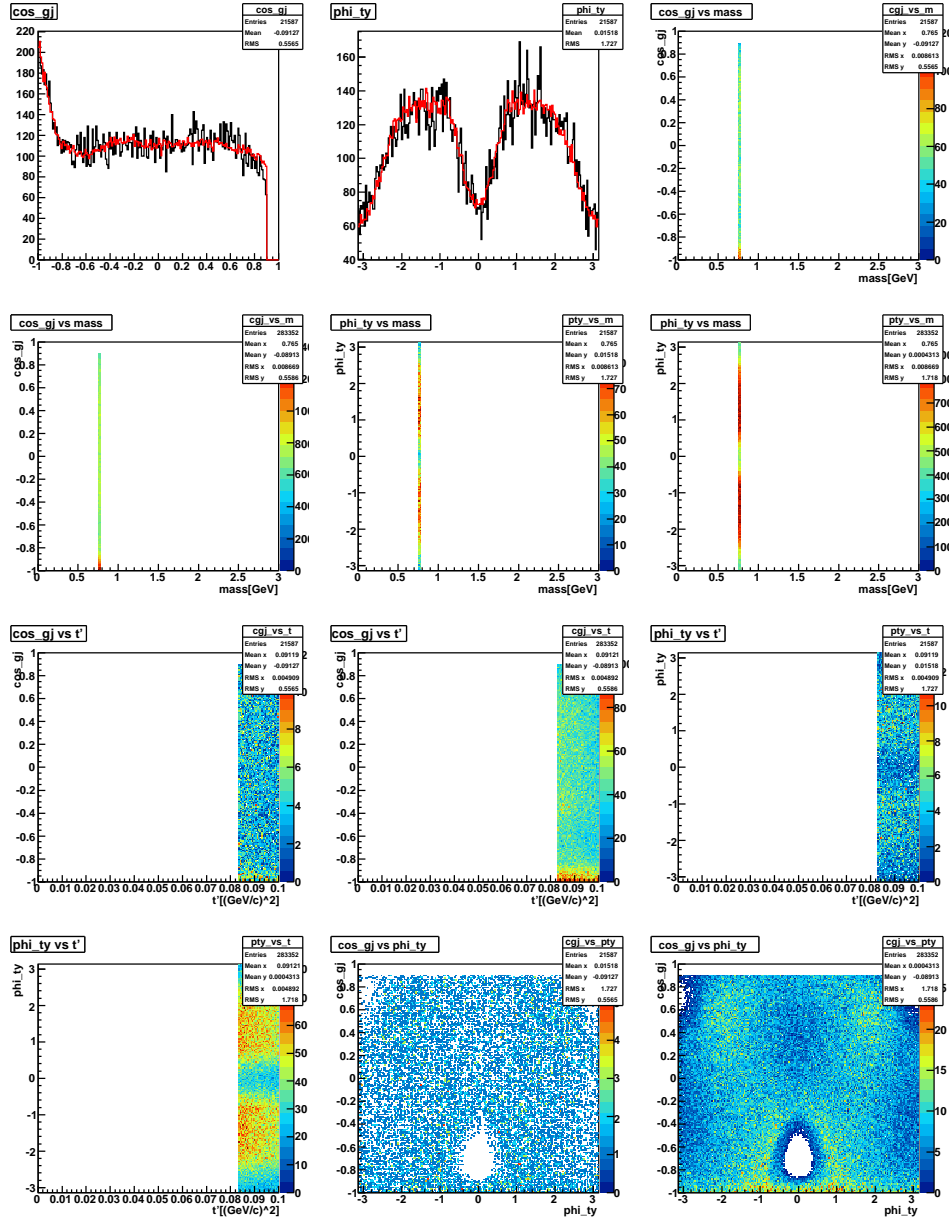


Рис. А.4: (продолжение). Сравнение распределений для данных (черная линия) и решений, полученных при угловом анализе (красная линия).

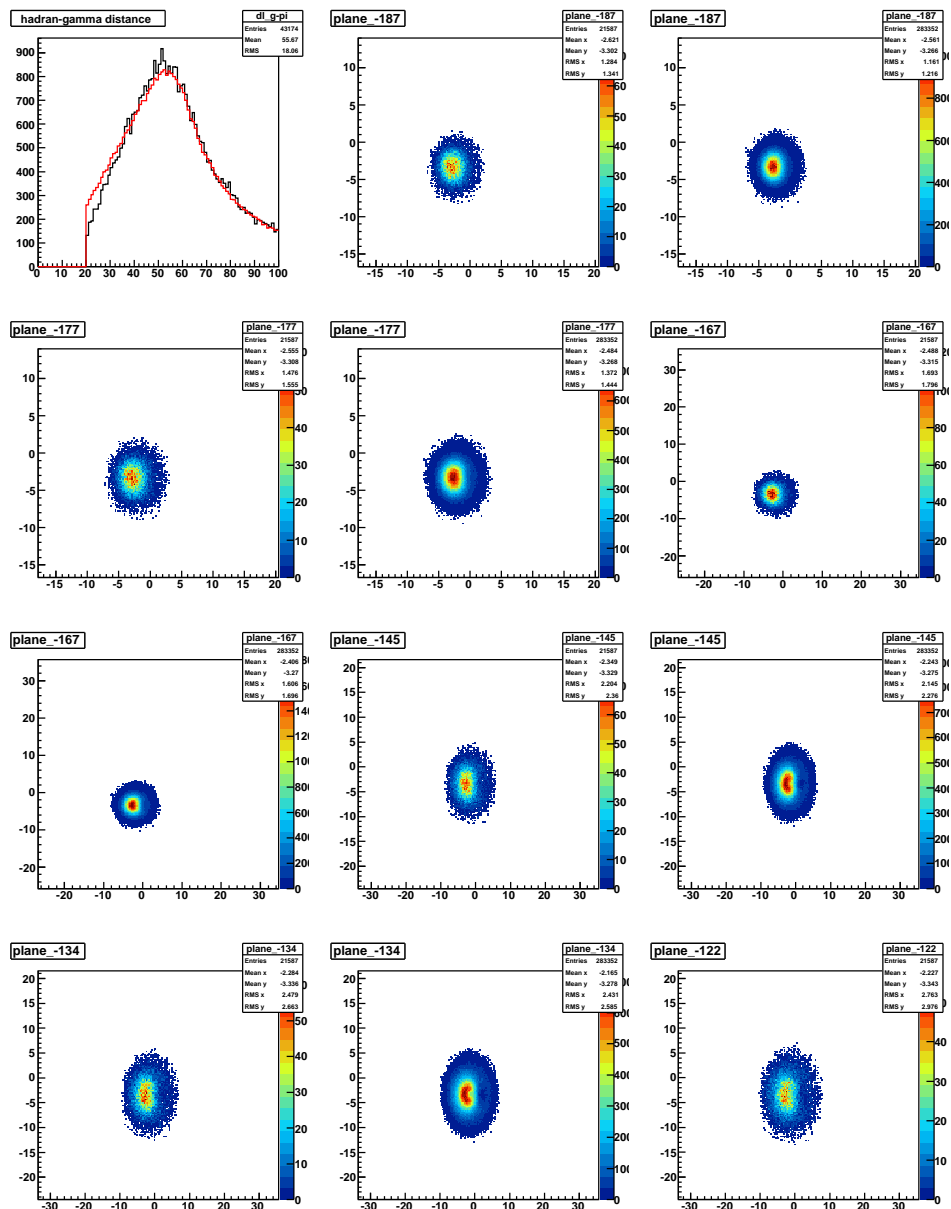


Рис. А.5: (продолжение). Сравнение распределений для данных (черная линия) и решений, полученных при угловом анализе (красная линия). Проекция хитов на различные поперечные плоскости (соответствующие детекторам), продольные координаты плоскости включены в название гистограмм. Направление осей стандартное, направление частиц ”в лицо”.

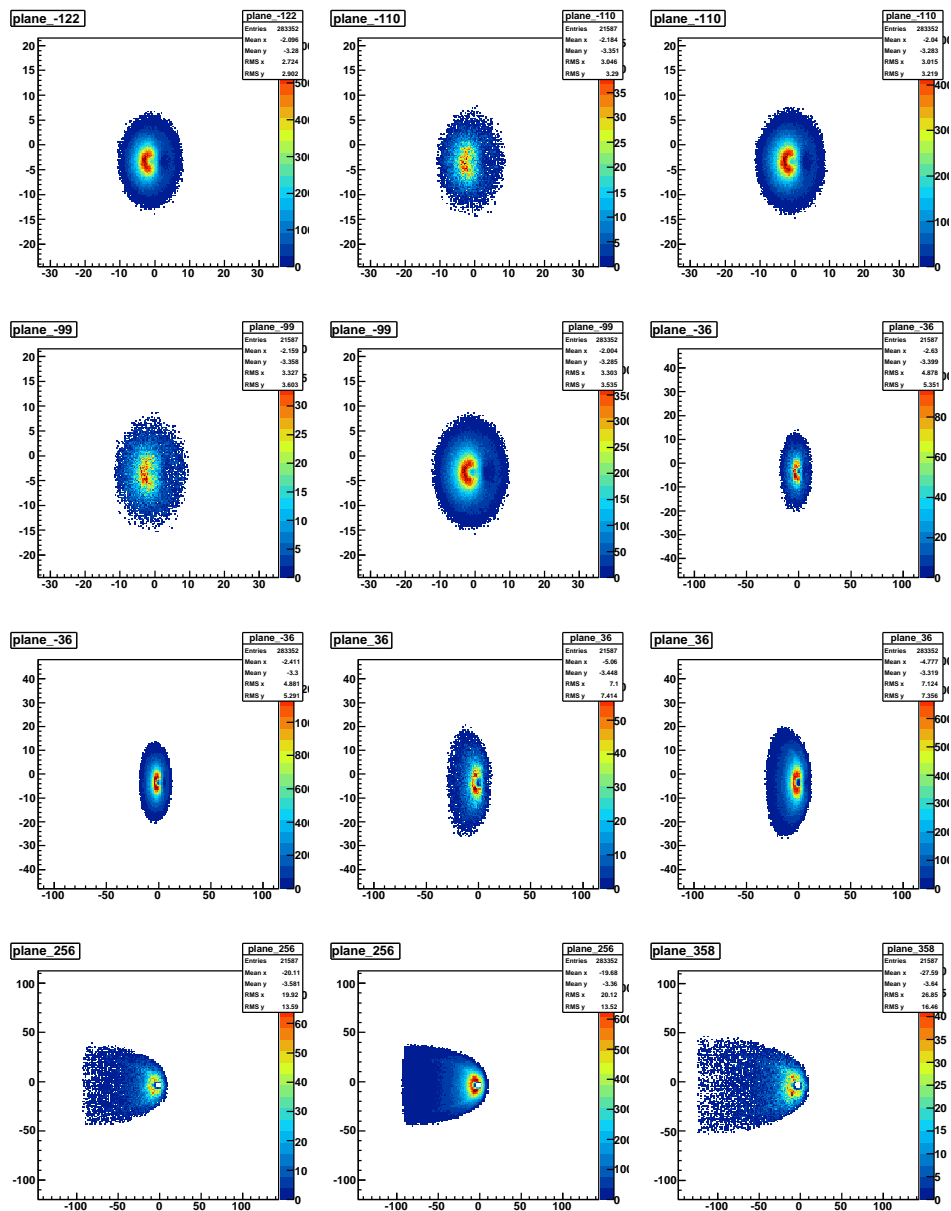


Рис. А.6: (продолжение). Сравнение распределений для данных (черная линия) и решений, полученных при угловом анализе (красная линия). Проекция хитов  $\pi^-$  на различные поперечные плоскости (соответствующие детекторам), продольные координаты плоскости включены в название гистограмм. Направление осей стандартное, направление частиц ”в лицо”.

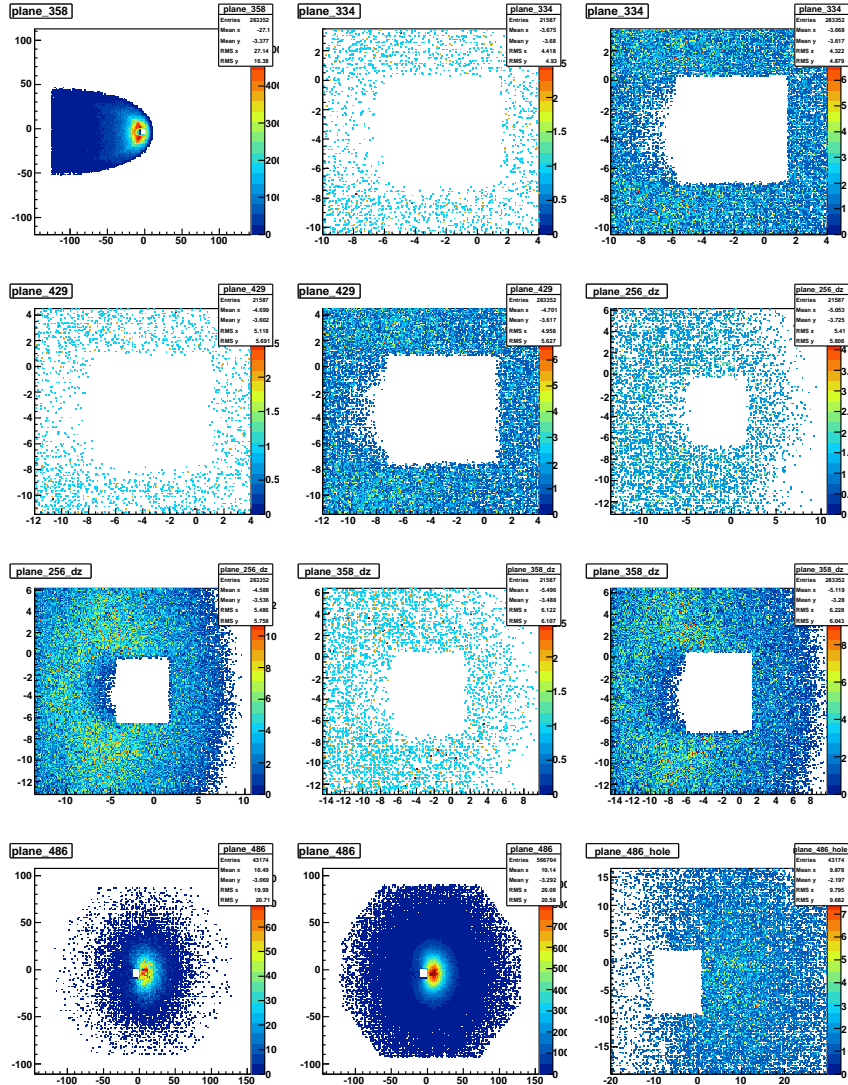
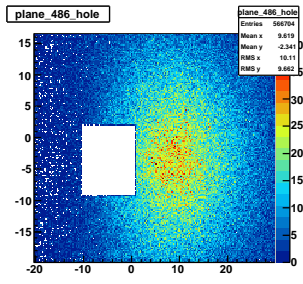


Рис. А.7: (продолжение). Сравнение распределений для данных (черная линия) и решений, полученных при угловом анализе (красная линия). Проекции хитов  $\pi^-$  на различные поперечные плоскости (соответствующие детекторам), продольные координаты плоскости включены в название гистограмм. Направление осей стандартное, направление частиц "в лицо". На плоскостях 334, 429 наскологаются *beam-killers* К1, К2, имеющие круглую форму, на плоскостях 256, 328 находятся станции дрейфовых камер с квадратной мертвой зоной. На последней картинке изображена плоскость электромагнитного калориметра и хитами гамма-квантов.





# Приложение В

## Моменты

На рисунках (В.1,В.2) показаны восстановленные *produced*-моменты при помощи простого метода линейной алгебры (красная линия) и расширенного метода (черная линия). Распределения нумеруются буквами S,P,D,F,G,H<sup>1</sup> в соответствии со значением углового момента  $l$ .

Распределения (В.3,В.4,В.5) соответствуют сравнению *produced*-моментов полученных простым методом линейной алгебры и при помощи минимизации в формализме расширенного метода максимума правдоподобия. Отличие при больших массах ( $> 2.2 \text{ ГэВ}/c^2$ ) связано с тем, что на решение в методе максимума правдоподобия накладывается условие положительности (плотность вероятности стоит под знаком логарифма).

Абсолютная нормировка моментов является произвольной, но общей для всех бинов по инвариантной массе и разных моментов.

---

<sup>1</sup>здесь речь идет об интенсивности, а не об амплитудном разложении, возможно, буквы выбраны в альтернативу цифрам не совсем удачно

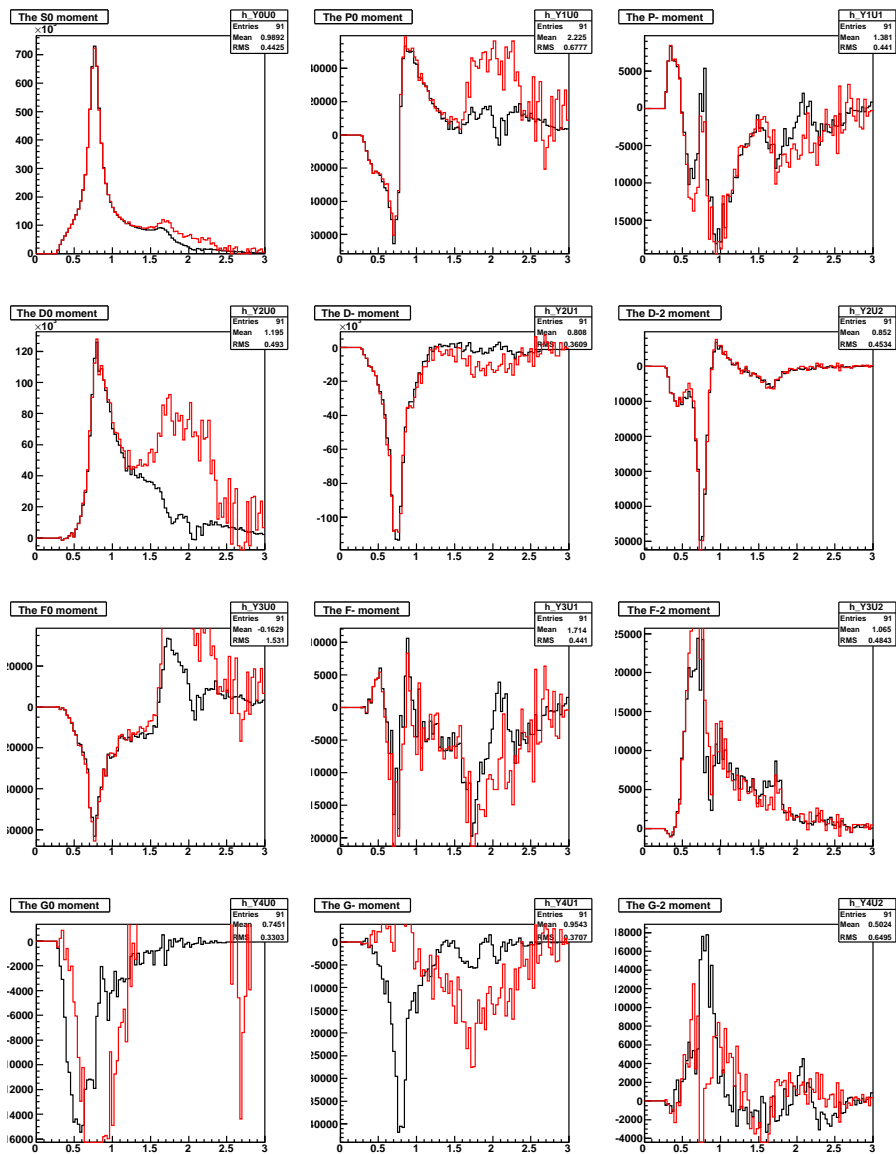


Рис. В.1: Распределения по инвариантной массе для *produced* моментов, полученные простым методом линейной алгебры (красная линия) и расширенным методом (черная линия).

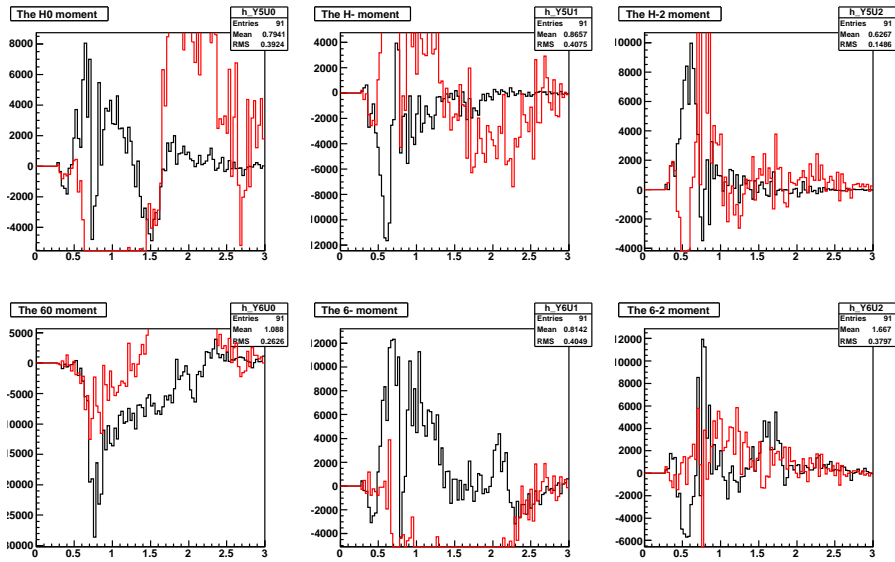


Рис. В.2: (продолжение) Распределения по инвариантной массе для *produced* моментов, полученные простым методом линейной алгебры (красная линия) и расширенным методом (черная линия).

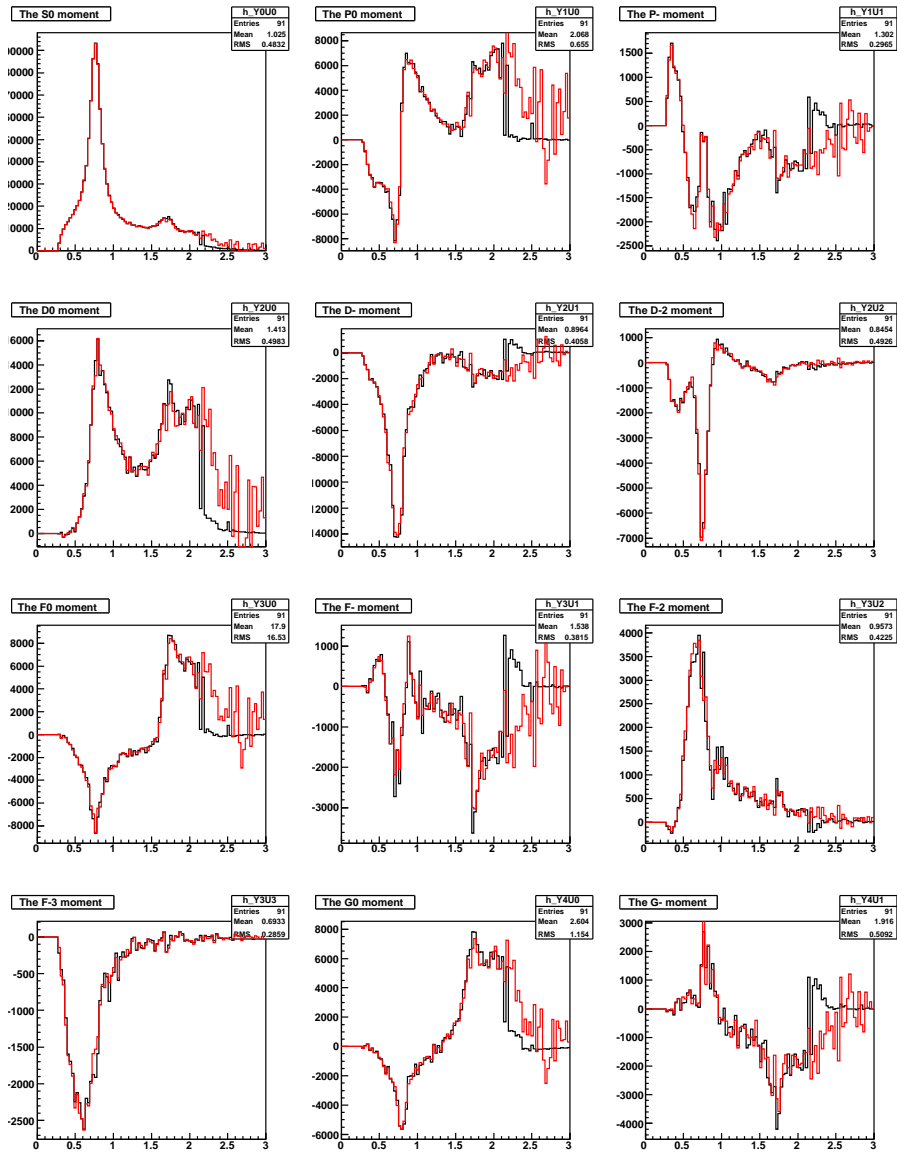


Рис. В.3: Распределения по инвариантной массе для *produced* моментов, полученные методом линейной алгебры (красная линия) и методом максимума правдоподобия (черная линия).

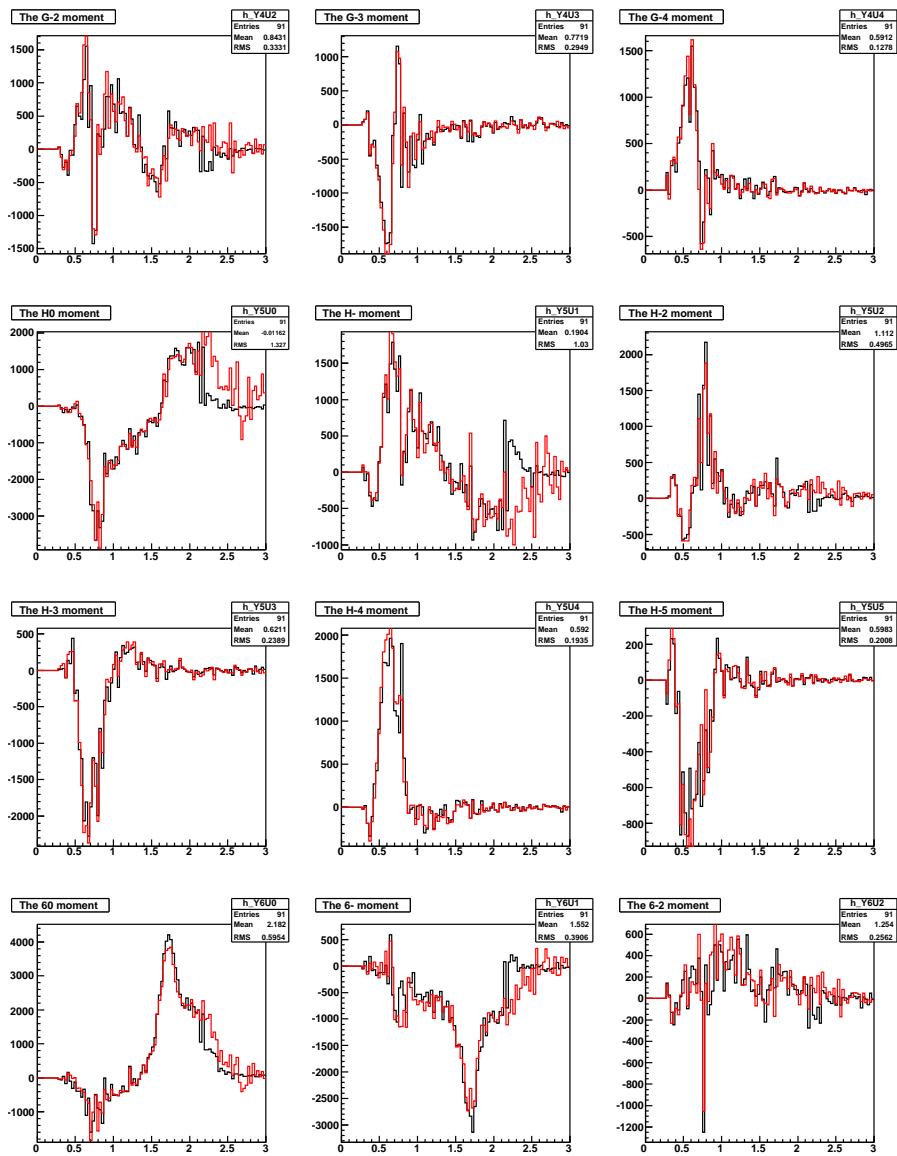


Рис. В.4: Распределения по инвариантной массе для *produced* моментов, полученные методом линейной алгебры (красная линия) и методом максимума правдоподобия (черная линия).

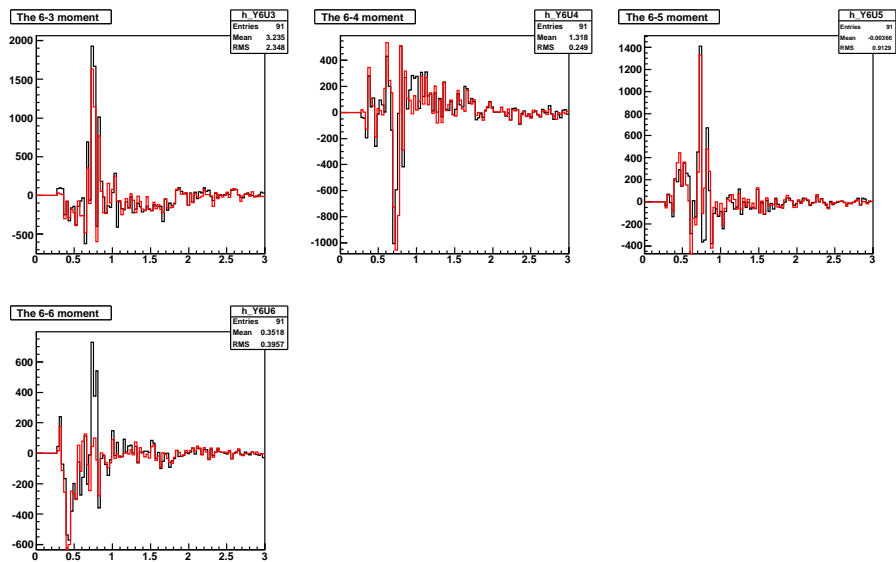


Рис. В.5: Распределения по инвариантной массе для *produced* моментов, полученные методом линейной алгебры (красная линия) и методом максимума правдоподобия (черная линия).

# Приложение С

## Результаты фита

В данном приложении приведены результаты парциально-волнового анализа – распределения по инвариантной массе для разных волн и разных интервалов по  $t'$  после процедуры фита.

На каждом из рис. (С.1-С.3) справа налево сверху вниз изображены различные интервалы по  $t'$ , которые были следующие (единицы измерения  $(\text{ГэВ}/c)^2$ ):  $[0, 0.005]$ ,  $[0.005, 0.01]$ ,  $[0.01, 0.016]$ ,  $[0.016, 0.023]$ ,  $[0.023, 0.031]$ ,  $[0.031, 0.040]$ ,  $[0.040, 0.052]$ ,  $[0.052, 0.066]$ ,  $[0.066, 0.083]$ ,  $[0.083, 0.100]$ ,  $[0.1, 0.13]$ ,  $[0.13, 0.17]$ ,  $[0.17, 0.22]$ ,  $[0.22, 0.3]$ ,  $[0.3, 0.47]$ .

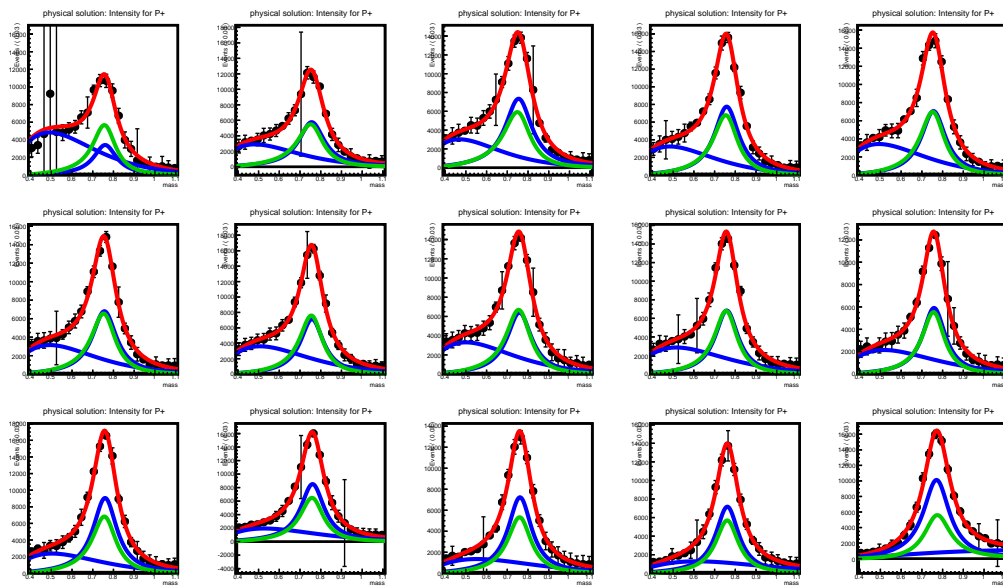


Рис. С.1: Фит распределения по массе для  $P_+$ -волны формулой (7.4)

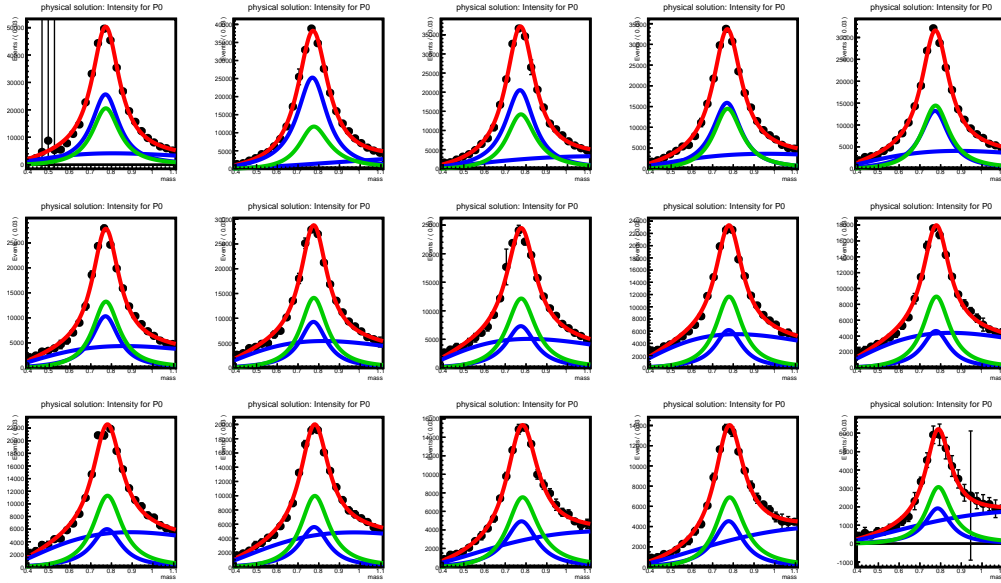


Рис. С.2: Фит распределения по массе для  $P_0$ -волны формулой (7.4)

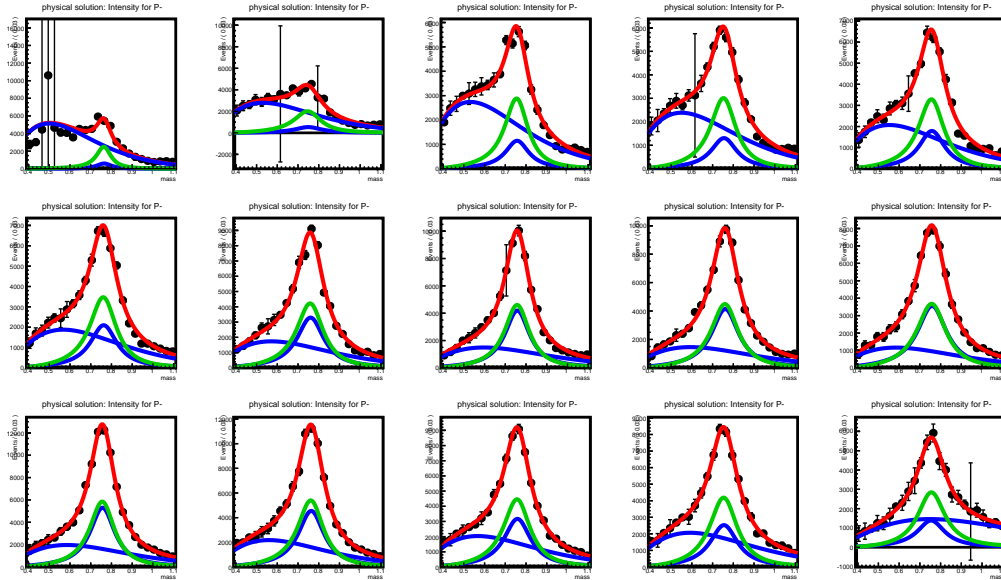


Рис. С.3: Фит распределения по массе для  $P_-$ -волны формулой (7.4)